CURSO DE NIVELACION MATEMATICA

Facultad de Ciencias Agrarias

AÑO 2020

Guía de Nivelación Teórica – Practica de Matemática.

Edición:

Ing. Agr. Carlos Marcelo Quintana (FCA Jujuy).

Ing. Ind. Ricardo Fabián Cáceres. (FCA Jujuy).

Ing. Agr. Marta Celia Leaño. (FCA Jujuy).

Colaboración:

Ing. Agr. Rodolfo Aguado (FCA Jujuy); Ing. Qco. Jaime Ismael Saravia (FCA Jujuy); (FCA Jujuy); Ing. Agr. José A. Cruz (FCA Jujuy); Ing. Agr. Samuel B. Gaspar (expansión académica San Pedro); CPN. Luciana Vera (FCA Jujuy); Ing. Agr. Norma Beatriz Zapana (expansión académica San Pedro); Prof. Univ. de Matemática. Gonzalo Bono (expansiones académica Humahuaca y La Quiaca), Ing. Agr. Jorge Chauque (expansiones académica Humahuaca y La Quiaca); Ing Agr. Jhony J. Rospilloso Chávez (expansión académica San Pedro); Ing Qco. Jesús Alfredo Iván Córdoba (expansión académica Humahuaca); Dra. en Alimentos. Sonia Calliope (expansión académica San Pedro); Ing. Agr. Esteban A. Molina (expansiones académica San Pedro, Caimancito y Tilcara); Lic. en Biologia Roque Yapura (expansión académica Tilcara); Lic. en Biologia Hinojosa Gustavo (expansión académica Humahuaca).

CURSO DE NIVELACION MATEMATICA. FEBRERO 2019.

MODULOS A DICTARSE Y TEMAS CONTENIDOS EN CADA UNO DE ELLOS:

MODULO I: CONJUNTO DE NUMEROS Y OPERACIONES. 1° PARTE.

La evolución del concepto de los números. Los números fraccionarios; convertir numero decimal en fraccionario, operaciones de números fraccionario. Potenciación, propiedades de la potenciación. Ejercicios combinados.

MODULO II: CONJUNTO DE NUMEROS Y OPERACIONES. 2° PARTE.

Radicación, propiedades de la radicación, extraer del radicando todos los términos posibles, simplificación de raíces, llevar a radical único, reducción a común índice; Racionalización (primer y segundo caso). Notación científica, Concepto, cálculos y aplicaciones.-

MODULO III: CONCEPTOS BÁSICOS DE GEOMETRIA.

Concepto de Plano; plano cartesiano; Punto; Recta, Relaciones y Funciones. Concepto de perímetro y superficie, cálculos de distintos casos de figuras geométricas básicas con su respectiva formula.-

MODULO IV: POLINOMIOS 1° PARTE.

Concepto de monomio, partes de un monomio. Polinomios, concepto. Operaciones de polinomios: Suma y resta de monomios semejantes, Suma algebraica de polinomios, Multiplicación de un polinomio por un monomio, Multiplicación entre dos polinomios, División entre polinomios.-

MODULO V: POLINOMIOS 2° PARTE. MAGNITUDES Y UNIDADES.

Polinomios 2° parte: Regla de Ruffini. Teorema del Resto. Magnitudes y unidades: medidas de longitud, medidas de superficie, medidas agrarias, medidas de capacidad, medidas volumétricas.-

MODULO VI: FACTOREO.

Concepto de factoreo un polinomio. Distintos casos de factoreo: Factor común, Descomposición en grupo, Trinomio cuadrado perfecto, Cuatrinomio cubo perfecto, Diferencia de cuadrado, Suma y o diferencia de cubo

MODULO I: CONJUNTO DE NÚMEROS Y OPERACIONES (1°PARTE).

LA EVOLUCIÓN DEL CONCEPTO DE NÚMEROS:

A) CONJUNTO DE NUMEROS NATURALES **(N):** surgieron ante la necesidad de contar, los mismos constituyen la sucesión de números naturales que van de 1 y crecen indefinidamente 1, 2, 3, 4….
Dentro del campo de los números naturales pueden realizarse las operaciones de suma y multiplicación. La resta solo es posible cuando el minuendo es mayor al sustraendo. Ej: 6 – 4 = 2. Pues el numero 2 sumado a 4 nos da 6 (concepto de resta). Pero 4 – 9 = ¿?. No existe un numero natural que sumado a 9 nos de 4. Para salvar esta situación se crearon los Números Enteros.

B) CONJUNTO NUMEROS ENTEROS **(Z)**: El conjunto de número enteros es el que se logra agregando al conjunto de números naturales el cero y los números negativos.
….-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4…
Dentro de este conjunto podemos resolver el caso planteado anteriormente 4 – 9 = (-5) pues (-5) + 9 = 4.
Dentro del conjunto de los números enteros podemos realizar, en todos los casos, las operaciones de suma, resta, y multiplicación. La división solo es factible cuando el dividendo es múltiplo exacto del divisor (dicho en otras palabras, su resto nos da valor cero) ej: 14 / 7 = 2 pues 2 x 7 = 14. Pero 17 / 3 = ¿? No es posible dentro del campo de los números enteros, pues no existe un número que multiplicado por 3 nos de 17. Para salvar este inconveniente se amplió el campo de los números incluyendo el concepto de fracciones numéricas (o números fraccionarios), surgiendo el conjunto de los Números Racionales.

C) CONJUNTO DE NUMEROS RACIONALES **(Q)**: está formado por los números enteros y los números fraccionarios.

Se entiende por número fraccionario o fracción al cociente indicado de dos números enteros tales que el dividendo no sea múltiplo exacto del divisor. Ej: $\frac{4}{5}, -\frac{15}{8}, \frac{5}{9}$, etc.

El número por arriba de la raya de fracción se denomina numerador, y el que figura debajo de la misma se lo llama denominador. En una fracción el denominador indica en cuantas partes se dividió la unidad y el numerador nos dice cuanta de ellas estamos considerando. Ej 4/5 significa que hemos dividido la unidad en cinco partes y estamos considerando cuatro de ellas

Las fracciones podemos dividirla en:

- *Fracciones Puras*: son las fracciones propias, cuyo cociente es menor a la unidad, es decir el numerador es menor que el denominador ej: $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$, etc.

- *Fracciones Impuras*: se llaman impuras porque su cociente nos da un valor mayor a la unidad, es decir el numerador es mayor al denominador ej.: $\frac{8}{5}, \frac{15}{11}$, etc.
- *Fracciones aparentes*: son aquellas que representan a un número entero ej.:$\frac{9}{3}, \frac{21}{7}$ etc.

IGUALDAD O DESIGUALDAD ENTRE DOS FRACCIONES

En la comparación de dos fracciones, a los fines de determinar cuál de ellas es mayor, o si ambas son iguales se utilizan los siguientes criterios:

a) Dada dos fracciones positivas de igual denominador, es mayor la que tiene mayor numerador.
b) Dada dos fracciones negativas de igual denominador es mayor la que tiene menor numerador.
c) Dadas dos fracciones una positiva y otra negativa, es mayor siempre la positiva.
d) Dada dos fracciones positivas de distinto denominador, es mayor aquella para la cual resulta mayor el producto de su numerador por el denominador de la otra.
e) Dada dos fracciones negativas de distinto denominador, es mayor aquella para la cual resulta menor el producto de su numerador por el denominador de la otra. Por ejemplo:

$$\frac{6}{5} > \frac{4}{5}\,; \qquad -\frac{6}{7} < -\frac{1}{7}\,; \qquad \frac{3}{4} > -\frac{5}{2}; \qquad \frac{2}{8} = \frac{1}{4}; \qquad \frac{5}{3} > \frac{6}{5}; \qquad -\frac{3}{4} < -\frac{2}{7}$$

Las fracciones al tratarse de números podemos realizar distintas operaciones algebraicas como suma, resta, producto y división.

Los Números Racionales se pueden expresar como fracciones, incluso los números decimales periódicos (aquellos en los que hay un periodo o número de cifra que se repite indefinidamente) pueden expresarse como fracción.

Para hallar la fracción de un *número decimal limitado*, colocamos como numerador el número completo sin la coma, y como denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales haya, procediendo luego a simplificar si es posible.

$$0{,}425 = \frac{425}{1000} = \frac{17}{40} \qquad ; \qquad 1{,}27 = \frac{127}{100}$$

En el caso de que tengamos un *número decimal periódico puro,* por ejemplo $0{,}2525\widehat{25}\ldots$ de periodo 25 se puede expresar como una fracción que tendrá por numerador el periodo "25" y como denominador tantos nueve como cifras tenga el periodo, procediendo luego a simplificar en lo posible.

$$0{,}25252525\ldots = 0{,}\widehat{25} = \frac{25}{99}$$

Si contamos con un *número decimal periódico mixto* con una parte periódica y otra no periódica podemos proceder a transformarlo en fracción de la siguiente forma. Ejemplo:

$0{,}256565656\ldots = 0{,}2\widehat{56}$: Periodo 56. Podemos decir: $\boxed{N = 0{,}2\widehat{56}}$

- Multiplico la igualdad por la unidad seguida de cero con tantos ceros para separar la parte periódica de la parte no periódica. En este caso por diez.

$$10N = 2{,}56\ldots$$

- Ahora multiplicando la igualdad origen por la unidad seguida de cero, con tantos ceros como corresponda para separar toda la parte decimal incluida la primer repetición del periodo.

$$1000N = 256{,}56\ldots$$

- Realizando la diferencia entre ambas igualdades.

$$10N = 2{,}56\ldots$$

$$\underline{1000N = 256{,}56\ldots}$$

$$990\mathrm{N} = 256$$

- Finalmente despejamos "N" y obtenemos la fracción buscada.

$$N = \frac{254}{990}$$

Mecánicamente podemos transformar un número decimal que está formado por una parte decimal no periódica y una parte periódica utilizando la siguiente formula que surge del razonamiento anterior

$$\boxed{\frac{N°\ completo\ incluida\ la\ primer\ repeticion\ del\ periodo - N°formado\ solo\ con\ la\ parte\ no\ periodica}{N°\ formado\ por\ tantos\ 9\ como\ cifras\ tenga\ el\ periodo\ y\ tantos\ 0\ como\ cifras\ tenga\ la\ parte\ no\ periodica\ decimal}}$$

Ejemplos:

$$0{,}35\widetilde{56} = \frac{3556 - 35}{9900} = \frac{3521}{9900}$$

$$1{,}3\widetilde{16} = \frac{1316 - 13}{990} = \frac{1303}{990}$$

$$2,\widetilde{37} = \frac{237 - 2}{99} = \frac{235}{99}$$

<u>SUMA Y RESTA DE FRACCIONES.</u>

- <u>SUMA O RESTA DE FRACCIONES DE IGUAL DENOMINADOR</u>.

La suma o resta de dos o más fracciones de igual denominador es otra fracción que tiene el mismo denominador, y por numerador la suma o resta de los numeradores de las fracciones dadas. Ejemplo:

$$\frac{5}{3}+\frac{7}{3}-\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$$

- SUMA O RESTA DE FRACCIONES DE DISTINTO DENOMINADOR.

Para sumar o restar fracciones de distinto denominador, debemos calcular el “mínimo común múltiplo de los denominadores” y para transformar la suma o resta en un caso apartado anterior, se multiplica el numerador de cada fracción por el cociente entre el denominador común obtenido (mínimo común múltiplo) y el denominador de cada fracción. Ejemplo:

$$\frac{2}{3}+\frac{7}{12}-\frac{1}{4}=\frac{[(12\div 3)\times 2]+[(12\div 12)\times 7]-[(12\div 4)\times 1]}{12}=\frac{8+7-3}{12}=\frac{12}{12}=1$$

- PRODUCTO DE FRACCIONES.

El producto de dos o más fracciones es otra fracción que tiene por numerador el producto de los numeradores y como denominador el producto de los denominadores de las fracciones dadas. Ejemplo

$$\frac{1}{5}\times\left(-\frac{3}{2}\right)\times\frac{5}{4}=-\frac{15}{40}=-\frac{3}{8}$$

- DIVISION DE FRACCIONES

El cociente entre de dos fracciones es otra fracción que tiene por numerador, el producto del numerador del dividendo por el denominador del divisor; y por denominador el producto del denominador del dividendo por el numerador del divisor. Esto puede lograrse también multiplicando la fracción del dividendo por la inversa o reciproca de la fracción divisor. Ejemplo.

$$\frac{1}{4}\div\frac{5}{6}=\frac{6}{20}$$

$$\frac{1}{4}\times\frac{6}{5}=\frac{6}{20}$$

Todo Numero Racional **“Q”** se puede expresar como fracción. Sin embargo existen números que no pueden expresarse como fracción. Ejemplo:

$\sqrt{2}=1{,}414213562\ldots$ $\quad\pi=3{,}141592654\ldots.$ $\quad e=2{,}718281828\ldots.$ $\quad\sqrt{3}=1{,}732050808\ldots$

Los números que no podemos expresarlos como una fracción se los conoce como Números Irracionales (I). El campo de los Números Racionales (Q) y los Números Irracionales (I) se los denomina Números Reales **“R”**.

D) CONJUNTO DE LOS NUMEROS REALES **(R):** Es el formado por los Números Racionales (Q) y los Números Irracionales (I). Dentro de este conjunto podemos realizar

las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potencia y raíz (no en todos los casos).
Cuando el subradical es negativo, hay casos que no existen números dentro de los números reales que cumplan con la definición de raíz.

Ejemplos de números reales que pueden aplicarse radicación:

$$\sqrt{4} = 2 \therefore 2^2 = 4 \qquad \sqrt[3]{27} = 3 \therefore 3^3 = 27 \qquad \sqrt[3]{-8} = -2 \therefore (-2)^3 = -8$$

Como dijimos, no siempre se puede aplicar radicación. Por ejemplo:

$$\sqrt{-16} = 4 \therefore 4^2 \neq 16 \quad o \quad \sqrt{-16} = -4 \therefore (-4)^2 \neq 16 \rightarrow \quad no\ fue\ posible\ aplicar\ radicacion$$

$$\sqrt[6]{-64} = 2 \therefore 2^6 \neq 64 \quad o \quad \sqrt[6]{-64} = -2 \therefore (-2)^6 \neq 64 \rightarrow \quad no\ fue\ posible\ aplicar\ radicacion$$

Es decir cuando el índice es par y el subradical negativo "no existe en el campo de los Números Reales un número real que elevado a una potencia par nos dé por resultado un numero negativo". Para salvar este inconveniente se crearon los <u>Números Imaginarios.</u>

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4.(-1)} = \sqrt{4}.\sqrt{-1} \qquad sabemos: \sqrt{4} = 2 \ ; \ \sqrt{-1} = i \ (lo\ designamos\ unidad\ imaginaria)$$

$$\therefore \sqrt{-4} = 2\,i$$

<u>$\boldsymbol{2\,i}$</u> es un Numero Imaginario.

Ejemplo 2: Si realizamos igual razonamientos concluimos que $\sqrt[4]{-625} = \boldsymbol{5i}$

E) <u>CONJUNTOS DE LOS NUMEROS COMPLEJOS</u>: designamos como número complejo aquel formado por una parte real y una parte imaginaria. Ejemplo:

$$\boldsymbol{z = 5 + 3i}$$

"Z" es un número complejo; "5" es la parte real; y "3i" es la parte imaginaria.

POTENCIACION.

Cuando multiplicamos un número por sí mismo, podemos expresar esa multiplicación como la potencia del mismo número.

$$\boldsymbol{a \times a \times a \times a \times a = a^5}$$

Al factor que multiplicamos repetidas veces lo llamamos "base de la potencia" (en este caso <u>$\boldsymbol{a}$</u>). El número de repeticiones se llama "exponente" en nuestro caso <u>5</u>.

PROPIEDADES.

- La potenciación "es distributiva" respecto del producto y el cociente.

$$(a \div b)^n = a^n \div b^n$$

$$(a \, x \, b)^n = a^n x \, b^n$$

- La potenciación "no es distributiva" respecto de la suma y resta.

$$(a \pm b)^n \neq a^n \pm b^n$$

- El producto de potencia de igual base es otra potencia que tiene la misma base, y por exponente la suma de los exponentes.

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

- El cociente entre potencia de igual base es otra potencia que tiene la misma base, y por exponente la diferencia entre el exponente del dividendo y el exponente del divisor.

$$a^n \div a^m = a^{n-m}$$

- Al elevar una potencia a otra potencia, se obtiene una potencia que tiene como base la base de la potencia dada y como exponente el producto de los exponentes.

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

- La potencia de exponente igual a uno es igual a la base.

$$a^1 = a$$

- La potencia de exponente cero, para cualquier base es igual a la unidad.

$$a^0 = 1$$

- Una potencia de exponente negativo es igual a una fracción que tiene por numerador la unidad y por denominador una potencia igual a la dada, pero con exponente positivo.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

- Una potencia de exponente fraccionario se puede escribir como una raíz de índice igual al denominador de la fracción y subradical igual a la base de la potencia elevada a un exponente igual al numerador de la fracción.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

MODULO I

TRABAJO PRACTICO: CONJUNTO DE NUMEROS Y OPERACIONES (1° PARTE).

Simbolismo usual:

- $\mathbb{N}$: Conjunto de los números naturales
- $\mathbb{Z}^-$: Conjunto de los números entero-negativos
- $\mathbb{Z}$: Conjunto de los números enteros
- $\mathbb{F}_p$: Conjunto de los números fraccionarios puros
- $\mathbb{Q}$: Conjunto de los números racionales
- $\mathbb{I}$: Conjunto de los números irracionales
- $\mathbb{R}$: Conjunto de los números reales
- $\in$: "pertenece a ..." (Pertenencia entre elemento y conjunto)

EJERCICIO Nº1: Utilizando la simbología clasificar en cada ejemplo a qué conjunto/s numérico/s pertenecen ($\in$) los siguientes números:

a) 8 b) -3 c) $\frac{5}{4}$ d) 157 e) 0,71 f) $-\sqrt{38}$ g) $-\frac{7}{3}$ h) $\sqrt[3]{8}$ i) $\sqrt[3]{64}$

j) π k) 0 l) $2{,}133\widehat{3}.....$ m) $\sqrt[6]{-1}$ n) $\sqrt{1}$ ñ) $(-8)^2$ o) $\sqrt[7]{3}$ p) $\sqrt{36}$

Ejercicio Nº2: Responder con verdadero (**V**), o falso (**F**), según corresponda, en cada uno de los siguientes casos:

a) 0,3574 $\in$ **Q** b) - 12 $\in$ **N** **c)** $2{,}71658\widehat{9} \in$ **I**

d) $\sqrt{7} \in$ **R** e) $-\sqrt{144} \in$ **Z** f) $\sqrt{50} \in$ **N**

Ejercicio Nº3: Dados los números:

5,2159 - $5{,}2159\widehat{7}$ - 5,2159024845 - $5{,}21590\widehat{7}$. Responder:

a) ¿Cómo son entre sí los números? b) ¿Podes ordenarlos en forma creciente?

Ejercicio Nº4: Las siguientes fracciones, ¿son puras, impuras o aparentes?

$\frac{5}{13}$ $\quad -\frac{7}{9}$ $\quad \frac{534}{97}$ $\quad -\frac{2}{7}$ $\quad -\frac{15}{3}$ $\quad \frac{10}{99}$ $\quad \frac{49}{7}$

Ejercicio Nº5: Indicar el sentido de desigualdad, o igualdad entre las siguientes fracciones.

a) $\frac{3}{2} \quad \frac{6}{4}$ b) $\frac{7}{2} \quad \frac{3}{4}$ c) $-\frac{3}{27} \quad -\frac{8}{3}$ d) $\frac{3}{18} \quad \frac{3}{16}$ e) $\frac{9}{3} \quad -\frac{11}{17}$

f) $\frac{60}{5} \quad \frac{84}{7}$ g) $\frac{2}{5} \quad -\frac{2}{5}$ h) $-\frac{3}{27} \quad -\frac{8}{3}$ i) $\frac{7}{8} \quad \frac{49}{56}$ j) $\frac{9}{3} \quad -\frac{11}{17}$

Ejercicio Nº6: Escribir los siguientes números decimales como fracciones

a) $0{,}1570$ b) $0,\hat{7}$ c) $0{,}367$ d) $2{,}2\hat{8}$ e) $5{,}02\hat{9}$ f) $1{,}125\widehat{17}$

g) $0,\widehat{35}$ h) $0{,}5\widehat{27}$ i) $1{,}258$ j) $0{,}2\hat{9}$ k) $1{,}969696\ldots$ l) $0,\widehat{725}$

Ejercicio Nº7: Sumar las siguientes fracciones

a) $\frac{5}{4}+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=$ b) $-\frac{2}{5}+\frac{6}{5}-\frac{9}{15}=$ c) $\frac{25}{4}+\frac{3}{2}-\frac{2}{9}+\frac{1}{36}=$

d) $\frac{8}{7}+\frac{3}{2}=$ e) $\frac{12}{21}-\frac{1}{3}-\frac{8}{7}+\frac{5}{3}=$ f) $\frac{27}{7}-\frac{111}{28}-\frac{46}{7}=$ g) $\frac{11}{9}-\frac{3}{5}+\frac{11}{10}=$

Ejercicio Nº8: Calcular mentalmente:

a) $1+\frac{2}{7}$ b) $3+\frac{5}{2}=$ c) $5-\frac{1}{3}=$ d) $\frac{3}{2}+4=$ e) $3-\frac{2}{5}$ f) $\frac{1}{5}-3=$

Ejercicio Nº9: Realizar las siguientes operaciones combinadas:

a) $25.\left(\frac{1}{5}+7\right)+12.\frac{5}{6}-7=$ b) $-\frac{2}{3}.(3)-\frac{1}{8}.\left(4-\frac{1}{5}\right)-4=$

c) $25\,.\,(-\frac{1}{5}+7)\;+\;12\,.\frac{5}{6}\;-\;7=$

d) $-21-\;(-10)+\;\frac{1}{4}\;-\;8=$

e) $-3+\left[(12.(-7)+8-1.\left(-\frac{7}{3}\right)\right]=$

f) $25.\left(-\frac{6}{7}.(-9)\right)-(-4+\frac{5}{16}+10)=$

g) $-\frac{1}{2}-\left(\frac{5}{3}+6-\frac{3}{5}\right)-(-4\,.\,2)=$

h) $\left(-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{7}{8}\,.\,6\right)+\left(-\frac{9}{3}-1\right)-(-5)=$

Ejercicio N° 10: Encontrar el valor "x" en las siguientes ecuaciones

a) $5-9x=7x-10$

b) $3.(-5-x+12)=87-38$

c) $\frac{1}{48}x-5=3x-\frac{2}{7}$

d) $2x-3=5x+6$

e) $\frac{1}{3}x+\frac{25}{7}=\frac{1}{4}x+3$

f) $6\,.\,(\frac{1}{2}x)-2x=25+2x$

g) $7.(\frac{y}{5})+2y=37$

h) $\frac{5}{4}x+14x=34$

i) $-\frac{6}{5}+\frac{4}{7}x+62=17-x$

j) $\frac{x-{}^{3}/_{4}}{7}-\frac{x-{}^{2}/_{3}}{14}=-36$

k) $\frac{2}{5}.(2x+2)=x+9=$

l) $7x-\frac{3}{8}x+27=4x$

Ejercicio Nº11: Resolver los ejercicios combinados siguientes (el signo "." simboliza una multiplicación):

a) $(-2)^3+(-2)^2=$

b) $(-5+3)^3\div(-4)^2-\sqrt{49}.(-6)=$

c) $(4)^2.(-7)\div\sqrt{36}+9=$

d) $\sqrt{-3^2-(-3+8)}-(-3)^3$

e) $\sqrt[3]{(-3)^2-6.(-3)}+\sqrt{6-8\div 4}=$

f) $\sqrt[5]{-2+2.(-15)}-(-2)^3+2.(-5)=$

g) $0,\hat{3}+0,\hat{6}-0{,}13\hat{5}=$

h) $\left(\frac{2}{3}+\frac{91}{6}-3,\hat{5}\right)\div 2,\hat{7}=$

i) $\dfrac{\frac{2}{5}-\frac{3}{4}}{\left(-\frac{7}{5}\right)^2}=$

j) $\dfrac{\sqrt[3]{\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{7}\right)^{-1}}}{\sqrt[3]{\left(\frac{7}{8}-2\right)^{-1}}}=$

Ejercicio Nº12: Aplicando las propiedades de la potenciación expresar los siguientes productos y cocientes como potencias únicas; luego calcular el resultado final.

a) $\left(-\frac{3}{2}\right).\left(-\frac{3}{2}\right)^3.\left(-\frac{3}{2}\right)^2 =$ b) $\left(-\frac{5}{4}\right)^2 \div \left(-\frac{5}{4}\right)^3 =$ c) $\left(\frac{5}{6}\right)^{-4} \div \left(\frac{5}{4}\right)^{-5}$

d) $0{,}3^2.\,0{,}3^{-3}.\,0{,}3^7 =$ e) $(-\,0{,}9)^8 : (-\,0{,}9)^{-6} =$ f) $\left[\left(-\frac{4}{5}\right)^3\right]^{-5} =$

g) $[(3{,}5)^{-3}]^{-2} =$ h) $\left[(-1{,}2)^{\frac{2}{7}}\right]^{-5} =$ i) $\left[\left(-\frac{3}{4}\right)^{\frac{6}{5}}\right]^{-\frac{5}{2}} =$

MODULO II: CONJUNTO DE NÚMEROS Y OPERACIONES (2°PARTE).

Radicación.

La raíz enésima de un número "$\boldsymbol{a}$" es un número "$\boldsymbol{b}$" siempre que $\boldsymbol{b^n = a}$. $\boldsymbol{\sqrt[n]{a} = b \therefore b^n = a}$.
Podemos decir que la radicación es una operación inversa de la potenciación (ya que estamos calculando la base de la potencia, conociendo la potencia y el exponente).

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{a} = b \ \therefore \ b^n = a}$$

Así mismo por una propiedad vista para la potenciación, la raíz de índice "n" puede expresarse como potencia de exponente 1/n.

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

Del mismo modo: $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$

Por esta razón las propiedades vistas para potenciación son válidas para la radicación.

Propiedades:

- La radicación es distributiva respecto del producto y el cociente pero no es distributiva respecto de la suma y resta.

$$\sqrt[n]{a \times b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \quad ; \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad ; \quad \sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$$

- Si tenemos el producto de dos raíces de igual subradical, pero distintos índices podemos decir que:

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[m]{a} = a^{1/n} \times a^{1/m} = a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} = a^{\frac{m+n}{n \times m}} = \sqrt[n \times m]{a^{m+n}}$$

- La raíz enésima de la raíz emésima de un subradical "a", es igual a otra raíz que tiene el mismo subradical, y como índice igual al producto de los índices de las raíces.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \times m]{a}$$

- La raíz de índice unitario para cualquier subradical es igual al mismo subradical.

$$\sqrt[1]{a} = a$$

SACAR TERMINOS FUERA DEL SIGNO RADICAL.

Los términos que dentro del radical se encuentran con exponente, en valor absoluto, igual o mayor que el índice de la raíz, pueden extraerse fuera del signo radical. Salen afuera con un exponente igual al cociente entre el exponente que tenía y el índice de la raíz, dentro del radical el referido termino queda con un exponente igual al resto del mencionado cociente.

Ejemplo:

$$\sqrt[4]{32\,.\;a^{12}.\;b^{11}.\;c^3}$$

Esta raíz la podemos escribir de la siguiente manera: $\sqrt[4]{2^5.\;a^{12}.\;b^{11}.\;c^3}$.

Según lo enunciado, los términos que pueden extraerse fuera del signo radical son **2, a, b,** puesto que son los únicos que están afectados por un exponente mayor que el índice **4** de la raíz.

La división entre el exponente 5 (exponente de "2") y el índice 4 tiene como cociente y resto igual a uno, por lo tanto el factor "2" sale de la raíz con un exponente igual a uno y queda dentro del signo radical con exponente igual uno. El cociente entre 12 (exponente de "a") y 4 (índice de la raíz) es igual a tres y resto cero; por ende el factor "a" sale fuera del radical con exponente igual a 3 y queda dentro de la raíz con exponente igual a cero. De la misma manera la división entre 11 y 4 arroja un cociente igual a dos y resto igual a tres, por lo tanto el factor "b" sale fuera del signo radical con exponente igual a dos y permanece dentro de la raíz con exponente igual a tres.

$$\sqrt[4]{2^5.\;a^{12}.\;b^{11}.\;c^3} = 2^1.a^3.b^2.\sqrt[4]{2^1.a^0.b^3.\;c^3} = \boldsymbol{2\,.a^3.b^2.\sqrt[4]{2\,.\;b^3.\;c^3}}$$

SIMPLIFICACION DE RAICES

Para simplificar raíces se divide el índice de la raíz y el exponente del subradical por el mismo número. En el ejemplo que tenemos el índice de la raíz es quince y los exponentes de cada subradical son seis, tres, y nueve. Para simplificar debemos dividir el índice y los exponentes por un mismo número, *en este caso todos son divisibles por tres*; luego la raíz queda de índice cinco y los exponentes quedan reducidos a dos, uno, y tres respectivamente.

$$\sqrt[15]{3^6\,.\;x^3.\;z^9} = \sqrt[5]{\boldsymbol{3^2.\;x\,.\;9^3}} \quad (el\ indice\ y\ los\ exponentes\ fueron\ dividido\ por\ tres).$$

REDUCCION A MINIMO COMUN INDICE

Dado un cierto número de raíces afectadas por distintos índices, se puede reducir las mismas a un "minino común índice". El mínimo común índice es el mínimo común múltiplo de los índices. Los factores quedan dentro del subradical afectados de un exponente que se obtiene de multiplicar el exponente que tenían por un factor igual al que utilizaron para pasar del índice original, de la respectiva raíz, al índice común. Ejemplo:

$$\sqrt[3]{x}\,.\,\sqrt[5]{x^3}\,.\,\sqrt[6]{x^4} \;=$$

Tenemos el producto de tres raíces cuyos índices son tres, cinco y seis respectivamente. *Queremos obtener para todas un mismo índice*. El mínimo común múltiplo de los índices en cuestión es treinta. Las tres raíces dadas deben quedar con índice treinta, en consecuencia, para obtener una expresión equivalente a la dada debemos multiplicar en cada subradical los exponentes a los que estaban elevados los factores en ellos contenidos por un número igual al que multiplicamos los índices respectivos para obtener treinta. En la primera raíz para pasar del índice tres al treinta multiplicamos el índice tres por diez, por lo tanto, el exponente igual a uno que se encuentra elevado el subradical también debe de ser multiplicado por diez; y así procedemos con las otras dos raíces.

$$\sqrt[3]{x}\,.\,\sqrt[5]{x^3}\,.\,\sqrt[6]{x^4} \;=\; \sqrt[30]{x^{10}}.\,\sqrt[30]{x^{18}}.\,\sqrt[30]{x^{20}} = \sqrt[30]{x^{10}.\;x^{18}.\;x^{20}} = \sqrt[30]{\boldsymbol{x^{48}}}$$

RACIONALIZACION

Las operaciones de suma, resta, multiplicación y división reciben el nombre de “Operaciones algebraicas”.

Una expresión compuesta por números en cifras o letras vinculadas con las operaciones algebraicas se conoce como “Expresión Algebraica”.

Si en una expresión algebraica figura en el denominador la operación de radicación dicha expresión algebraica se denomina irracional. *La operación para eliminar la Raíz del denominador (mediante las propiedades vistas) se conoce como “Racionalización”.* Vamos a ver dos casos de racionalización.

1º. Cuando en el denominador figura un solo termino formado por una raíz de cualquier índice, se procede de la siguiente manera: se multiplica numerador y denominador por una raíz de igual índice y cuyo subradical esté formado por iguales factores que los de la raíz que queremos eliminar. Los factores del subradical (por el que multiplicamos y dividimos) deben estar elevados a un exponente tal que sumados a los que tenían en la raíz a eliminarse nos dé un valor igual al índice de aquella. A continuación, se simplifica quedando así eliminada la raíz del denominador. Ejemplo:

$$\frac{3.\,a^2\,.\,b}{\sqrt[5]{3^2.\,a^2.\,b^4}} =$$

Para racionalizar la siguiente fracción multiplicamos numerador y denominador por una raíz de índice cinco. El subradical de dicha raíz debe estar formado por el producto de los factores 3, a, y b, elevados a la potencia tres, tres y uno respectivamente. En el denominador queda el producto de dos raíces de igual índice, por lo que por la reciproca de la propiedad distributiva de la radicación respecto del producto podemos colocar todos los factores debajo de una misma raíz. Aplicando a continuación al subradical el producto de potencia de igual base obtenemos potencia de exponente igual al índice de la raíz procediendo finalmente a simplificar.

$$\frac{3.a^2.b}{\sqrt[5]{3^2.a^2.b^4}} = \frac{3.a^2.b.}{\sqrt[5]{3^2.a^2.b^4}} \times \frac{\sqrt[5]{3^3.a^3.b^1}}{\sqrt[5]{3^3.a^3.b^1}} = \frac{3.a^2.b.\sqrt[5]{3^3.a^3.b}}{\sqrt[5]{3^2.a^2.b^4}.\sqrt[5]{3^3.a^3.b}} = \frac{3.a^2.b.\sqrt[5]{3^3.a^3.b}}{\sqrt[5]{3^5.a^5.b^5}} =$$

$$= \frac{3.a^2.b.\sqrt[5]{3^3.a^3.b}}{3.a.b} = \boldsymbol{a.\sqrt[5]{3^3.a^3.b}}$$

2º. Otro de los casos que vamos a ver es cuando el denominador de la expresión algebraica está formado por un binomio en el cual uno o sus dos términos son raíces cuadráticas, es decir de índice igual a dos. En estos casos se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador. El conjugado de un binomio es otro binomio que tiene los mismos términos, pero cambiado el signo que vincula a ambos términos. Recordando que:

$$(a+b)\times(a-b) = a^2 - b^2$$

$$Diferencia\ de\ cuadrados\ (quinto\ caso\ de\ factoreo).$$

Se elevan al cuadrado los dos términos del binomio eliminándose de esta manera las raíces del denominador.

Ejemplo: Racionalizar la siguiente expresión, en la que el denominador es un binomio que tiene como uno de sus términos una raíz cuadrada. Multiplicaremos numerador y denominador por el conjugado del denominador. Luego aplicamos al denominador la diferencia de cuadrados enunciada arriba.

$$\frac{3x}{\sqrt{z}-3y} =$$

$$\frac{3x}{\sqrt{z}-3y} = \frac{3x}{\sqrt{z}-3y} \times \frac{(\sqrt{z}+3y)}{(\sqrt{z}+3y)} = \frac{3x.(\sqrt{z}+3y)}{(\sqrt{z}-3y).(\sqrt{z}+3y)} = \frac{3x.(\sqrt{z}+3y)}{(\sqrt{z})^2-(3y)^2} = \boldsymbol{\frac{3x.(\sqrt{z}+3y)}{z-9y^2}}$$

NOTACIÓN CIENTÍFICA

a) PRODUCTO DE UN NUMERO POR LA UNIDAD SEGUIDA DE CEROS:

El producto de un número por la unidad seguida de ceros es el que se logra agregando al número dado tantos ceros como los que acompañan a la unidad. Cuando se trata de número con parte decimal, se corre la coma hacia la derecha tantos lugares como ceros acompañen a la unidad, si fuera necesario se agregan tantos ceros a continuación de la última cifra significativa hasta lograr el número de lugares indicado por los ceros.

Ejemplo: $5 \times 100 =$ **500** ; $4{,}235 \times 10000 =$ **42350**

b) <u>DIVISIÓN DE UN NUMERO POR LA UNIDAD SEGUIDA DE CEROS:</u>

La división de un número por la unidad seguida de ceros se logra corriendo la coma hacia la izquierda tantos lugares como ceros acompañen a la unidad.

Ejemplo: $3 \div 100 =$ **0,03** ; $2{,}45 \div 1000 =$ **0,00245**

c) <u>EXPRESAR LA UNIDAD SEGUIDA DE CEROS COMO POTENCIA DE DIEZ.</u>

La unidad seguida de ceros se puede expresar como una potencia de base diez y exponente igual al número de ceros que acompañan a la unidad.

Ejemplo: $100 = \mathbf{10^2}$; $1000 = \mathbf{10^3}$; $100000 = \mathbf{10^5}$

Del mismo modo la unidad precedida de ceros se puede expresar como una potencia de base diez con un exponente negativo y de valor absoluto igual al número de ceros que anteceden a la unidad más uno, contados a partir de la coma decimal.

Ejemplo: $0{,}01 = \mathbf{10^{-2}}$; $0{,}001 = \mathbf{10^{-3}}$; $0{,}0001 = \mathbf{10^{-4}}$

d) <u>NOTACIÓN CIENTÍFICA:</u>

La notación científica es una manera rápida de representar un número utilizando potencias de base diez. Esta notación se utiliza para poder expresar muy fácilmente números muy grandes o muy pequeños. Por ejemplo el Nº de bacterias patógenas en una determinada cantidad de muestra de agua resultaría un número excesivamente grande que quizás no nos alcanzaría la hoja para escribirlo por la cantidad de ceros que contiene.

Un número está expresado en notación científica cuando se escribe de la siguiente manera:

$$\boxed{\mathbf{N^o = p \times 10^k}}$$

Donde, **"p" es un número decimal que cumple con la condición $1 \leq p < 10$ y "k" es un número entero.**

Ejemplo:

$164200 = \mathbf{1{,}64 \times 10^5}$; $0{,}0000341 = \mathbf{3{,}41 \times 10^{-5}}$

MODULO II

TRABAJO PRACTICO: CONJUNTO DE NUMEROS Y OPERACIONES "2º Parte"

EJERCICIO Nº1: Extraer fuera de la raíz todos los términos posibles:

a) $\sqrt[3]{256\,c\,z^2y^7x^4}$ b) $\sqrt{16807\,y\,m^5x^2}$ c) $\sqrt[5]{3125\,t^3m^4y^8}$

d) $\sqrt[7]{\frac{125\,t^{11}z^4\,x^9}{y^{-7}}}$ e) $\sqrt[3]{4000\,k^{17}\,x^8\,y^{12}}$ f) $\sqrt[4]{\frac{x^{17}}{y^8}\,y^{16}m^{21}}$

EJERCICIO Nº2: Simplificar las siguientes raíces:

a) $\sqrt{2401\,x^4y^8t^6}$ b) $\sqrt[6]{y^3m^{42}x^{24}}$ c) $\sqrt[25]{3125\,x^{10}w^{15}z^{30}}$

d) $\sqrt[16]{6561\,x^{32}k^8m^{48}}$ e) $\sqrt[14]{16384\,x^{28}h^7z^{35}}$ f) $\sqrt[9]{m^{18}g^{36}z^{81}}$

EJERCICIO Nº3: Llevar las siguientes expresiones como radical único y resolver si fuera posible:

a) $\sqrt{x^2}\,.\,\sqrt{x^7}\,.\,\sqrt{x^{-3}}$ b) $\sqrt[3]{x^2}\,.\sqrt[3]{x^5m^7}\div\sqrt[3]{y^6m^{-3}}$ c) $\sqrt[5]{x^{12}z^4}\,.\sqrt[5]{z^{-2}y^7m^8}\,.\sqrt[5]{m^5x^{-3}}$

d) $\sqrt[4]{x^2y^5}.\sqrt[4]{s^3c^7}\div\sqrt[4]{s^{-9}x^6t^9}$ e) $\sqrt{x^{-3}y^2}.\sqrt{c^5y^7x^{11}}\,.\sqrt{x^3m^7}$ f) $\sqrt[3]{m^5z^3}\div\sqrt[3]{s^8z^{-5}x^7}$

g) $\sqrt{81}\,.\,\sqrt{4}\,.\,\sqrt{16}$ h) $\frac{\sqrt{x^{12}}\,\sqrt{x^{-3}}}{\sqrt{x^4}}$

EJERCICIO Nº4: Reducir a común índice y resolver si fuera posible:

a) $\sqrt{x^2}\,.\sqrt[8]{x^3}\,.\sqrt[3]{x^5}$ b) $\frac{\sqrt[3]{x^5}\,.\sqrt[5]{y^4}}{\sqrt[7]{x^3}\,.\sqrt[15]{y^2}}$ c) $\frac{\sqrt{x^{13}y^4}\,.\sqrt[18]{y^{12}x^4}}{\sqrt[6]{x^2y^3}\,.\sqrt[3]{y^4x^5}}$ d) $\frac{\sqrt{m^8x^4}\,.\sqrt[3]{s\,x^9}}{\sqrt[6]{s^{-3}y^{-8}}\,.\sqrt[9]{m^{-5}x^{-15}}}$

e) $\sqrt[3]{9x^3}\,.\sqrt[7]{3^3x^9}\div\sqrt[15]{2^5x^3}$ f) $\sqrt[3]{5^7z^4}\,.\sqrt[5]{81\,x^4z^2}\,.\sqrt[9]{x^{-3}y^5}$ g) $\frac{\sqrt[9]{3\,m^7w^{-3}}\,.\sqrt[6]{8\,m^4y^3}}{\sqrt[5]{24\,w^{-9}y^{-5}}}$

EJERCICIO Nº5: Racionalizar las siguientes expresiones

<u>Primer Caso</u>:

a) $\frac{3ax^2}{\sqrt[5]{x^3a^2y^4}}=$ b) $\frac{m^2y^5x^4}{\sqrt[7]{x^3y^9m^4}}=$ c) $\frac{t^2s^5}{\sqrt[9]{t^{-5}y^4s^5}}=$ d) $\frac{3\,x^2z^2w^7}{\sqrt[5]{x^4w^2y^8}}=$

e) $\frac{5}{\sqrt[4]{r^9}} =$ f) $\frac{3}{\sqrt[3]{7}} =$ g) $\frac{3xmy}{\sqrt[3]{x^9y^7z^5}} =$ h) $\frac{5t^5m^2}{\sqrt[5]{7m^4t^2}}$

Segundo Caso:

i) $\frac{x^2y^4}{3x-\sqrt{x\ y}} =$ j) $\frac{5}{3+\sqrt{7}} =$ k) $\frac{35}{\sqrt{31}-5} =$ l) $\frac{93}{14-\sqrt{17}} =$

m) $\frac{m^3y^2z^5}{2mx-\sqrt{x\,z}} =$ n) $\frac{7\,s\,z^3\,\sqrt[3]{x}}{zx-\sqrt{x^2s^3}} =$ ñ) $\frac{2x\,y}{5x+\sqrt{x^3s^5y^7}} =$

EJERCICIO Nº6: Expresar los siguientes números en Notación Científica:

a) 125000000 = b) 0,00000000258 = c) 35900000 = d) 0,000000006589 =

e) 4890000000000 = f) 0,0000987 = g) 529,2 = h) 217000000 =

EJERCICIO Nº7: Expresar los siguientes números en Notación Vulgar:

a) $3{,}58 \times 10^5 =$ b) $0{,}56 \times 10^8 =$ c) $358{,}7\ 10^{-6} =$ d) $23 \times 10^4 =$

e) $0{,}17 \times 10^{-9} =$ f) $7923{,}68 \times 10^{-5} =$ g) $0{,}0058 \times 10^7 =$ h) $0{,}23 \times 10^8$

EJERCICIO Nº8: Expresar los siguientes números en Notación Científica y resolver:

$a)\ \frac{98500000 \times 74300000}{215000000} =$ $b)\ \frac{0{,}0000868\ \times\ 5368000000}{0{,}00000157}$ $c)\ \frac{23680000000\ \times 987000000}{0{,}000017 \times 0{,}000000089} =$

$d)\ \frac{0{,}0003748}{0{,}000000125} =$ $e)\ \frac{0{,}0000069\ x\ 1258000000}{3650000\ x\ 0{,}001258} =$ $f)\ \frac{12000\ x\ 0{,}326}{0{,}0000789} =$

$g)\ \frac{345000 \times 743000}{12{,}65} =$ $h)\ \frac{0{,}0812\ \times\ 12300000}{0{,}00043\ \times 589}$ $i)\ \frac{23600\ \times 987000000}{0{,}000017 \times 0{,}0079} =$

MODULO III: CONCEPTOS BÁSICOS DE GEOMETRÍA.

La geometría es la ciencia que trata las propiedades de las figuras geométricas del plano, del espacio y de sus relaciones empleadas para la medición de extensiones. La geometría es muy importante debido a que permite enseñar y aprender el arte de razonar, porque es abstracta, pero fácil de visualizar y tiene muchas aplicaciones concretas como por ejemplo calcular el área de un lote a ser sembrado, determinar el volumen de un tanque australiano para racionar el agua a una determinada cantidad de ganado, fijar alturas, pendientes, construir corrales de ganado bien estructurados, invernaderos eficientes en captar la energía solar, perimetrar un área de muestreo de algún insecto, etc.

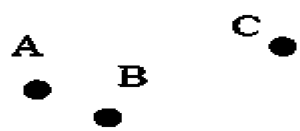
Geometría plana

La geometría plana estudia las figuras planas, que tienen únicamente dos dimensiones: largo y ancho.

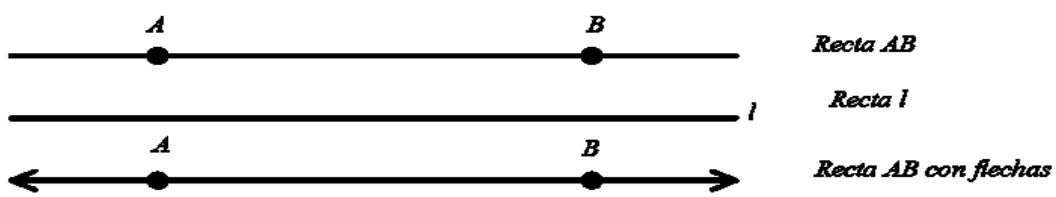
Conceptos básicos

Para el estudio de la geometría, es indispensable conocer el concepto intuitivo de **punto, recta y plano.** Estos son términos no definidos que proveen el inicio de la geometría.

Punto: es el objeto fundamental en geometría, el punto representa solo posición y no tiene dimensión, es decir, largo cero, ancho cero y altura cero. Se representan por letras mayúsculas.



Recta: tiene solo longitud, no tiene ancho ni altura ni grosor. Es un conjunto infinito de puntos que se extienden en una dimensión en ambas direcciones. Una recta se designa mediante las letras de dos de cualquiera de sus puntos o bien con una letra minúscula.

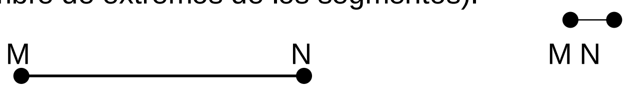


Una recta es ilimitada, es decir puede prolongarse indefinidamente en cualquiera de los dos sentidos (no tiene origen ni final). La línea recta es la más corta que se puede trazar entre dos puntos dados. Se admite los dos postulados siguientes:

- ✓ Por dos puntos pasa una recta y solamente una.
- ✓ Dos rectas no pueden tener más que un punto en común (salvo las rectas superpuestas).

<u>Semirrecta y Segmento</u>: Si sobre una recta señalamos un punto cualquiera "P", se denomina semirrecta al conjunto de puntos formado por el punto "P" y todos los puntos que lo preceden en el mismo sentido (es una porción de recta que tiene inicio pero no tiene fin). Para denotar una semirrecta se señala otro punto además del origen.

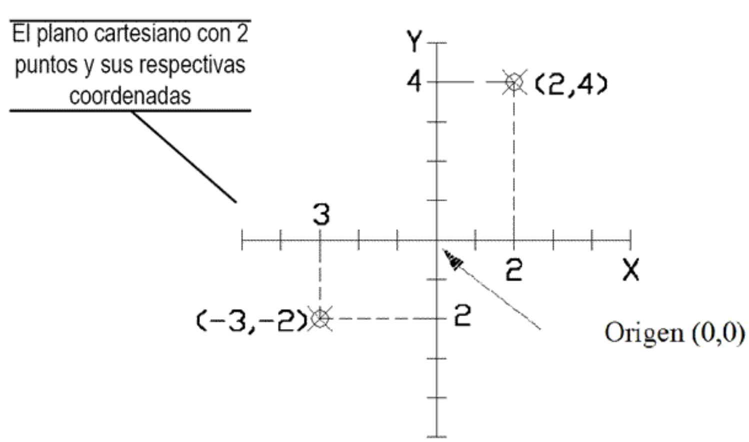
Llamamos segmento de una recta a la porción de recta comprendida entre dos de sus puntos (que reciben el nombre de extremos de los segmentos).



<u>Plano:</u> tiene ancho y largo, pero carecen de espesor. Un plano es una superficie en dos dimensiones, se puede pensar como un conjunto de puntos infinitos en dos dimensiones.

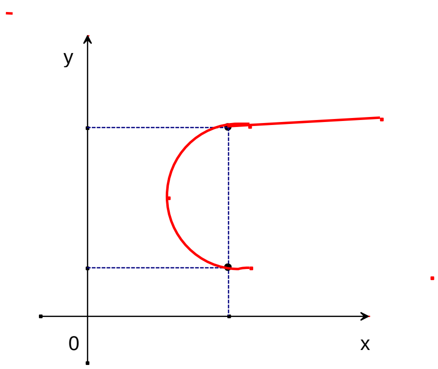
<u>Plano Cartesiano</u>

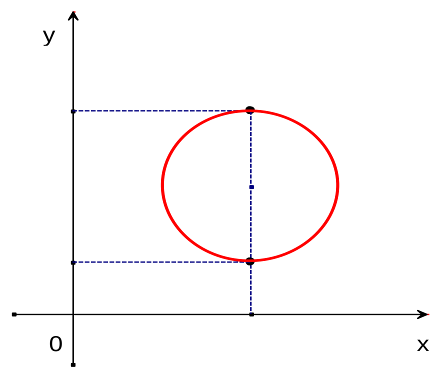
El plano cartesiano está formado por dos rectas numéricas perpendiculares, una horizontal y otra vertical que se cortan en un punto. La recta horizontal es llamada eje de las abscisas o de las equis (x), y la vertical, eje de las ordenadas o de las yes, (y); el punto donde se cortan recibe el nombre de origen. El plano cartesiano tiene como finalidad describir la posición de puntos, los cuales se representan por sus coordenadas o pares ordenados. Ejemplo.



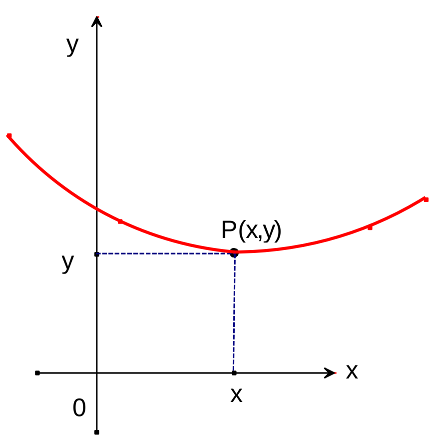
Relaciones y funciones

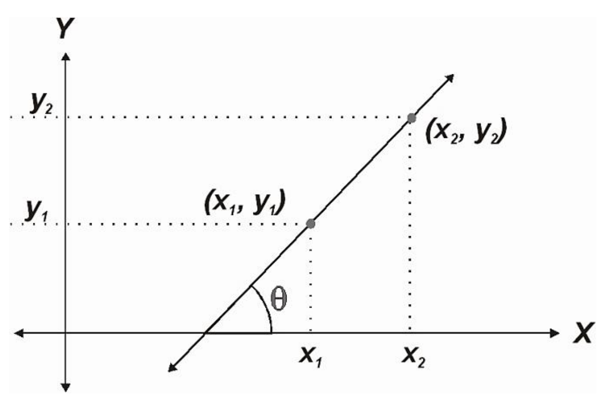
Relación matemática: se trata de la correspondencia que existe entre dos conjuntos: a cada elemento del primer conjunto le corresponde al menos un elemento del segundo conjunto. **geométricamente** es una gráfica en el plano en la cual existen dos o más puntos que comparten la misma primera coordenada. Ejemplo: la parábola de eje de simetría horizontal y la circunferencia





Una **función** (f) es una relación entre un conjunto dado **X** (llamado dominio) y otro conjunto de elementos **Y** (llamado codominio) de forma que a cada elemento x del dominio le corresponde un único elemento f(x) del codominio. Geométricamente es una gráfica en el plano cartesiano en la cual no existen dos o más puntos que compartan la misma primer coordenada x. Ejemplo la parábola de eje de simetría vertical y una recta cualquiera no paralela al eje Y.





Concepto de Perímetro y Superficie.

El **perímetro** es la suma de las longitudes de todos los lados de una figura geométrica plana. Se refiere al contorno de una superficie o de una figura y a la medida de ese contorno.

La medida del perímetro de una figura depende de la unidad elegida, se mide en unidades lineales. Ej. cm, m, km, pies, yardas, millas, pulgadas, leguas, etc.

Conocer el perímetro de un campo, por ejemplo, permite definir qué cantidad de material se necesita para alambrarlo, es decir es un dato esencial para diseñar campos de pastoreo diferenciado

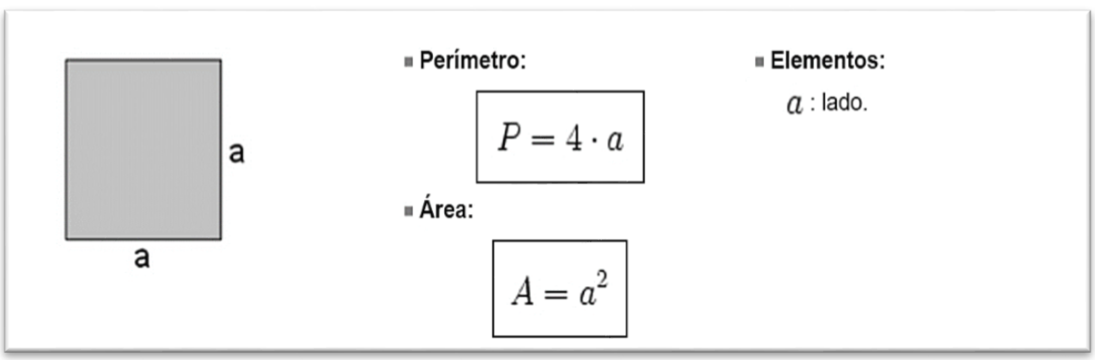
La porción del plano que ocupan las figuras se denomina **superficie**. La medida de esa superficie se llama área.

La medida del área de una superficie depende de la unidad elegida, se mide en unidades cuadradas. Ej. m^2 km^2, cm^2, acres, hectáreas, pies cuadrado, pulgadas cuadradas, etc. Es común en el agro hablar de acres y hectáreas como unidades de superficie

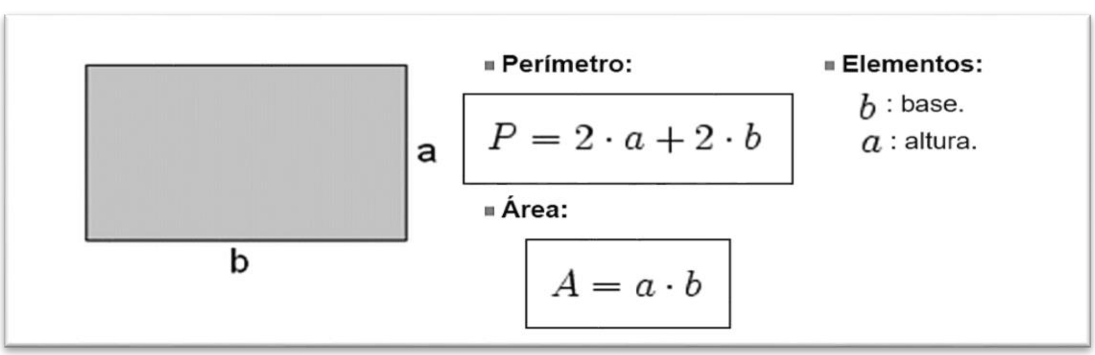
El cálculo de áreas es fundamental en todas las ciencias por ejemplo en las agropecuarias permite tomar decisiones sobre los sembradíos respecto a dosificaciones de plaguicida; para delimitar potreros de engorde; planificar la cantidad de m^2 por animales en corrales de encierre, estimar la superficie de una cuenca alterada por algún impacto ambiental, etc.

Perímetro y Superficie de planos conocidos

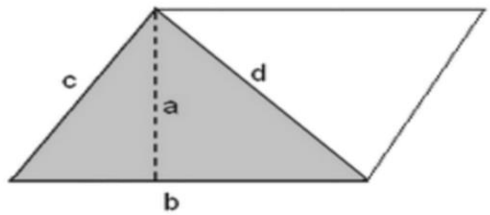
Cuadrado:



Rectángulo



Triángulos



- **Perímetro:**

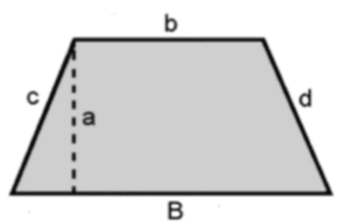
$$P = b + c + d$$

- **Área:**

$$A = \frac{b \cdot a}{2}$$

- **Elementos:**
  - b : base.
  - a : altura.
  - c , d : lados.
- **Nota:** Un triángulo es la mitad de un paralelogramo.

Trapecios



- **Perímetro:**

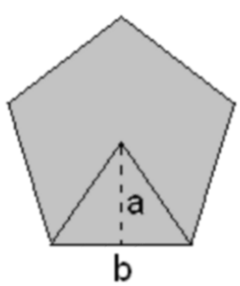
$$P = b + B + c + d$$

- **Área:**

$$A = \frac{(B + b) \cdot a}{2}$$

- **Elementos:**
  - B : base mayor.
  - b : base menor.
  - a : altura.
  - c , d : lados.

Polígonos Regulares



- **Perímetro:**

$$P = n \cdot b$$

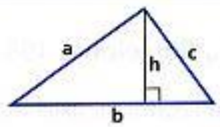
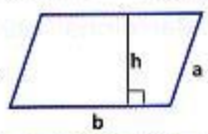
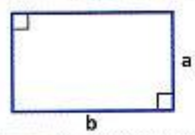
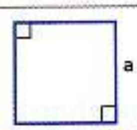
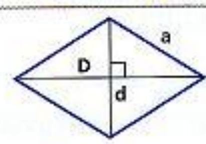
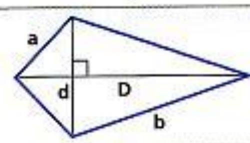
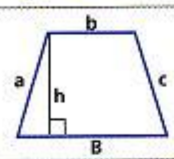
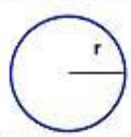
- **Área:**

$$A = \frac{P \cdot a}{2}$$

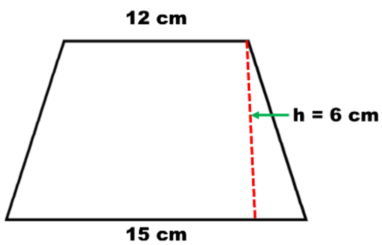
- **Elementos:**
  - b : lado.
  - a : apotema.
- **Nota:** n : número de lados.

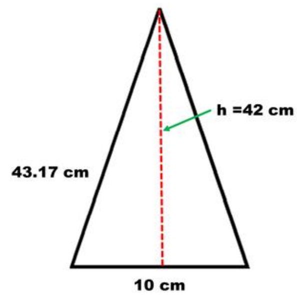
MODULO III

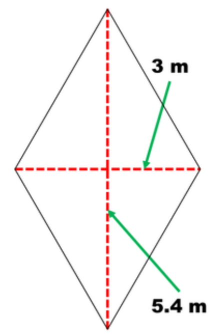
TRABAJO PRACTICO: GEOMETRIA (Cálculos de perímetros y superficies)

Perímetros y áreas de figuras planas	Perímetro	Area
Triángulo 	$a + b + c$	$\frac{b \cdot h}{2}$
Paralelogramo 	$2 \cdot (a + b)$	$b \cdot h$
Rectángulo 	$2 \cdot (b + a)$	$b \cdot a$
Cuadrado 	$4 \cdot a$	a^2
Rombo 	$4 \cdot a$	$\frac{D \cdot d}{2}$
Cometa 	$2 \cdot (b + a)$	$\frac{D \cdot d}{2}$
Trapecio 	$B + b + a + c$	$\frac{(B + b) \cdot h}{2}$
Círculo 	$2 \cdot \pi \cdot r$	$\pi \cdot r^2$

EJERCICIO Nº1: Calcular perímetro y la superficie de las siguientes figuras:

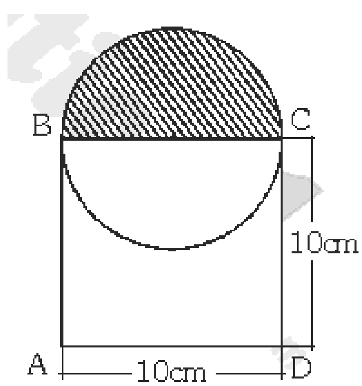




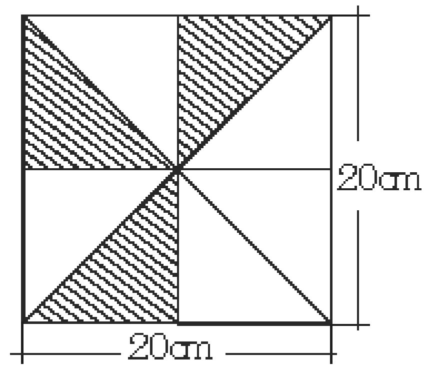


EJERCICIO N°2: Calcular las superficies sombreadas de las figuras que a continuación se detallan:

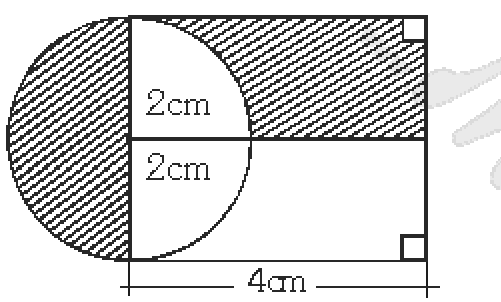
a)



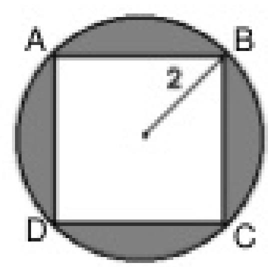
b)



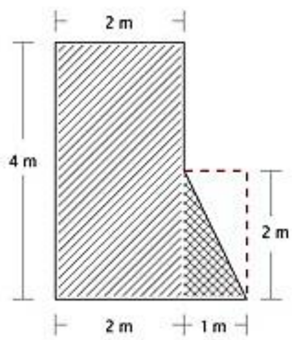
c)



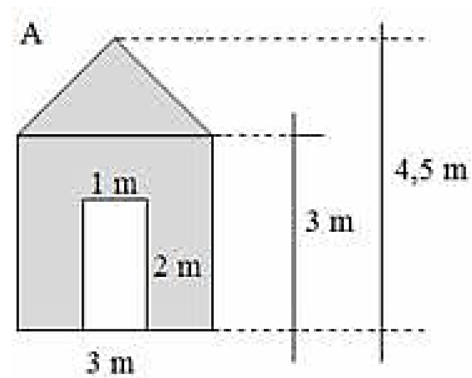
d)



e)



f)



Coordenadas Cartesianas

EJERCICIO Nº3: En un par de ejes coordenados cartesianos:

a) Representar los siguientes puntos en el planos: R (1,5); S (4,3); T(3,-6); U (-2, -4); V (-3, -3) y W(-5, 4).

b) Unir en el grafico sucesivamente los puntos R, S, T, U, V y W y determinar la figura proyectada. -

c) Encontrar el perímetro de la figura de la figura encontrada. –

MODULO IV: POLINOMIOS (1° PARTE).

Polinomio es una expresión algébrica constituida por la suma algebraica de un número finito de términos (monomios). Estos términos están formados por variables, constantes y exponentes. Una expresión algebraica es la combinación de números expresados por cifras o letras vinculadas por las operaciones algebraicas (suma, resta, multiplicación, división, potencia y radicación).

Un polinomio en una sola variable toma la forma:

$$\boldsymbol{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x^1 + a_n}$$

Donde **"n"** es un número entero positivo y los coeficientes **"a"** pertenecen al campo de los números reales y el coeficiente del primer término es distinto de cero. Este polinomio decimos que "es un polinomio en "x" de grado "n".

Los polinomios de un solo términos se llaman "Monomios", los de dos términos "Binomios", los de tres "Trinomios", los de cuatro "Cuatrinomio", lo de 5, 6, 7… se llaman "Polinomios de 5, 6, 7… términos".

ELEMENTOS DE UN MONOMIO:
Un Monomio posee una serie de elementos con denominación propia.
Dado el monomio $5x^3$, se distinguen los siguientes elementos:

- **coeficiente: 5**
- **parte literal: $\boldsymbol{x^3}$**

El coeficiente de un monomio es el factor numérico que aparece multiplicando a la parte literal. Normalmente se coloca al principio. Si tiene valor 1 no se escribe; y nunca puede ser cero ya que la expresión completa tendría valor cero.
*Se dice que dos o más monomios son **"semejantes"** cuando tienen la misma parte literal.* Ejemplo:

$$35\, a^3bx; \quad -8a^3bx; \quad \frac{3}{8}a^3bx \quad son\ monomios\ semejante\ pues\ tienen\ la\ misma\ parte\ literal$$

OPERACIONES CON POLINOMIOS

1. Suma y resta de monomios semejantes.

Para realizar la suma algebraica de dos o más monomios semejantes, se saca factor común la parte literal, y se efectúa la suma o resta de los coeficientes o partes numéricas. Ejemplo. Realizar la suma algebraica de los siguientes monomios semejantes.

$$-4x^2z + 6x^2z - \frac{-2}{5}x^2z = \boldsymbol{\frac{12}{5}x^2z}$$

2. <u>Suma algebraica de polinomios.</u>

Para sumar dos o más polinomios entre sí, se colocan uno debajo de otro, encolumnando los términos semejantes, procediendo luego a efectuar el procedimiento visto para la suma de monomios semejantes (es decir en cada columna de monomios semejantes sacamos factor común la parte literal y realizamos la suma algebraica de su parte numérica). Ejemplo: sumar algebraicamente los siguientes polinomios.

$$5x^2y - 3x^2 + 10y^2 \quad ; \quad 4x^2 + \frac{2}{5}y^2 \quad ; \quad 6x^2y + 2y$$

Ordenamos los polinomios encolumnando los monomios semejantes. Si existiese algún término que no tenga semejante se coloca en otra columna.

$$\begin{array}{cccc} 5x^2y & -\ 3x^2 & +\ 10y^2 & \\ & 4x^2 & +\ \frac{2}{5}y^2 & \\ \underline{6x^2y} & & & \underline{+\ 2y} \\ \boldsymbol{11x^2y} & \boldsymbol{+\ x^2} & \boldsymbol{+\ \frac{52}{5}y^2} & \boldsymbol{+\ 2y} \end{array}$$

3. <u>Multiplicación de polinomios</u>

a) <u>Multiplicación de un polinomio por un monomio</u>.

Dado el producto de un polinomio por un monomio, se aplica propiedad distributiva, multiplicando cada termino del polinomio por el monomio, teniendo cuidado con los signos y con los exponentes de la parte literal (producto de potencia de igual base). Ejemplo:

$$(2x^3 + 3x^2 - x + 3x^5a) \times (2x^2) = (2x^3 \times 2x^2) + (3x^2 \times 2x^2) - (x \times 2x^2) + (3x^5a \times 2x^2)$$

$$= \boldsymbol{4x^5 + 6x^4 - 2x^3 + 6x^7a}$$

b) <u>Multiplicación entre dos polinomios</u>

Se multiplican todos los términos de un polinomio por cada uno de los términos del otro factor. Se ordenan los productos en columnas de monomios semejantes y se suma por columnas. Ejemplo: Multiplicar $(3x^2 + 2x - 3) \times (3x - 4) =$

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 2x - 3 \\ \underline{\times \qquad 2x - 4} \\ 6x^3 + 4x^2 - 6x \qquad \\ \underline{-12x^2 - 8x + 12} \\ \boldsymbol{6x^3 - 8x^2 - 14x + 12} \end{array}$$

4. División entre polinomios

Para dividir entre si dos polinomios se ordenan dividendo y divisor según las potencias decrecientes de las mismas letras. Es conveniente completar al polinomio dividendo con términos del grado faltante y de coeficiente nulo si faltare alguno. Se divide el primer término del dividendo con el primero del divisor y así se obtiene el primer término del cociente. Para ello se busca para el cociente un término que multiplicado por el primero del divisor de un término igual al primero del dividendo. Se multiplica todo el divisor por el término obtenido para el cociente y este producto se resta del dividendo. Se repiten las operaciones hasta obtener un resto de grado menor que el divisor. Ejemplo: dividir $(6x^3 - 2x^2 + 9x + 3) \div (3x^2 - 2x + 2)$.

$$\begin{array}{l|l} 6x^3 - 2x^2 + 9x + 3 & 3x^2 - 2x + 2 \\ \cline{2-2} \underline{6x^3 - 4x^2 + 4x} & 2x + 2/3 \\ 0 \quad + 2x^2 + 5x + 3 & \\ \underline{\quad\quad 2x^2 - 4/3x + 4/3} & \\ \quad\quad 0 + \frac{19}{3}x + \frac{5}{3} & \end{array}$$

Pc: 2x+2/3

Pr: 19/3x+5/3

Para verificar si la operación fue bien realizada, se multiplica el cociente obtenido por el divisor, y a este producto le sumamos el resto obteniéndose como resultado el dividendo.

$$[(3x^2 - 2x + 2) \times (2x + 2/3)] + (19/3\,x + 5/3) = \boldsymbol{6x^3 - 2x^2 + 9x + 3}$$

MODULO IV

TRABAJO PRACTICO: POLINOMIOS (1°Parte)

EJERCICIO Nº1: Sumar los siguientes Monomios:

a) $3x^2$; $-1/8x^2$; $5/9x^2$ **b)** $2/3z^2y^4$; $-3z^2y^4$; $7z^2y^4$ **c)** $-\frac{3}{5}m^3x^2t^5$; $-2m^3x^2t^5$; $\frac{3}{9}m^3x^2t^5$

d) $-3/2xy^2z^3$; $5xy^2z^3$; ${}^5/_7\,xy^2z^3$ **e)** $3zx^2y^3$; $-4xz^2y^3$; $9zx^3y^3$ **f)** $\frac{6}{9}tz^5w^3$; $-9tz^5w^3$; tz^5w^3

g) $\frac{5}{2}x^3y^2$; $-\frac{3}{5}y^5z^3$; $\frac{5}{7}xy^2z^3$ **h)** $5w^4$; $3/4\,w^4$; $-10/3\,w^4$

EJERCICIO Nº 2: Sumar los siguientes polinomios:

a) $3yx^2-7zy^3+3mx^5$; $5/3zy^3+4mx^5-2/7yx^2$; $-2y^2x^2+1/4mx^5+9yx^2$

b) $-\frac{1}{4}zx^2+6y^3x^2+\frac{2}{3}ax^2$; $5ax^2-\frac{5}{9}y^3x^2-\frac{2}{9}az^2$; $15az^2+12zx^2+\frac{1}{4}y^3x^2$

c) $1/17ma^2-6ma^3+ma^4$; $5ma^3-8/5ma^4-1/6ma^2$; $-3/7ma^3+ma^2-5/8ma^4+5ax^2$

d) $\frac{2}{9}xy^2+4mxy^3+\frac{1}{7}axy^4$; $+7axy^4-\frac{3}{8}mxy^3+6axy^2$; $\frac{7}{3}mxy^3-2axy^4-axy^2$

e) $11x^3-2x^2+6x+11$; $4/3\,x^2+9/2\,x^3-2x+3$

f) $3zx^2+7xz-3z^2$; $-3z^2-\frac{1}{3}zx^2+\frac{2}{5}x^2+5z$

g) Encontrar la expresión que sumada a $(4x^2-2x^4+3x^3)$ nos da (x^2-2)

h) Encontrar la expresión que sumada a $(-4my^2+my^3-3my^4)$ nos da $(2my^2+5)$

i) Encontrar la expresión que sumada a (x^4-2x^2+x+1) nos da (x^2-2)

EJERCICIO Nº 3: Multiplicación de Polinomios:

a) $(m^3+nm^2+mn^2+n^2)\,.\,(m-n)=$

b) $\left(\frac{3}{5}x^3-xy+1/2\,y^2\right)\,.\,(x-3y)=$

c) $(xa^3-2a^3x^2+3ax^3-8x^4)\,.\,(4a^2-2x^2+2ax) =$

d) $(2nm^3-3m^2n^2+5)\,.\,(3/7n^4+1/5mn^4) =$

e) $(-2x^4+\frac{1}{4}x^3+x^5-8x^2)\,.\,(4x-3) =$

f) $(3mx^3-\frac{7}{8}nx^2-2x^2)\,.\left(5nx^3-2xm^2+3x^3-\frac{1}{4}mx\right) =$

g) $(5x^3-3x^2y+2x^2)\,.\,(2x^2+xy) =$

h) $(5y^3-7xy^2+12x^2y-5x^3)\,.\,(-7x^2-y^2) =$

EJERCICIO Nº 4: División de Polinomios

a) $(4m^5-3m^3+2m^2-m+8/3) \div (-2m^2+3) =$

b) $(-5m^5+2m^3+5/3m^2+2m-1) \div (3/5m^2-2m+1) =$

c) $(x^5+6x^4+4x^3-4x^2+2x) \div (x^2+x-1) =$

d) $(2y^4-5y^3+8y^2-3) \div \left(\frac{1}{4}y^2-3\right) =$

e) $(-3a^6+\frac{6}{7}a^3+a^2-3) \div \left(\frac{3}{7}a^3-2a^2\right) =$

f) $\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{3}{6}x+2x^3+11\right) \div \left(x-\frac{7}{2}\right) =$

g) $(3c^3-17) \div (2c-4) =$

h) $(x^5-5x^3+4x^2+9) \div (x^2-x+9) =$

MODULO V: POLINOMIOS (2°parte).

Regla de Ruffini.

La regla enunciada por Ruffini permite realizar de manera simple el cociente entre un polinomio en ***"x"*** y un binomio de la forma $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$. Se ordenan los términos del polinomio dividendo, completando si faltare alguno con término del grado faltante y coeficiente nulo. Luego se procede de la siguiente manera:

- El primer término del cociente tiene el mismo coeficiente que el primero del dividendo. La variable en el cociente tiene un exponente una unidad menor que el correspondiente al dividendo. El grado del cociente es una unidad menor que el grado del dividendo.

- Cada coeficiente de los términos siguientes se obtiene multiplicando el anterior por ***"a"*** sumando luego ese producto al coeficiente de igual posición del dividendo. El resto se obtiene de la misma manera. Se multiplica el término independiente del cociente por ***"a"*** y se lo suma al término independiente del dividendo.

Ejemplo: Resolver aplicando la regla de Ruffini. $(2x^4-9x^3+7x-15)\div(x-4)=$

5. Observamos que el polinomio dividendo no está completo. En consecuencia procedemos a completarlo con término de coeficiente nulo y parte literal elevada a la potencia que falta.
$$(2x^4-9x^3+0x^2+7x-15)\div(x-4)=$$

6. Ordenando de la siguiente manera, colocamos los coeficientes del dividendo en esta tabla y procedemos a efectuar las operaciones.

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 2 & -9 & 0 & 7 & -15 \\
a=4 & & 8 & -4 & -16 & -36 \\
\hline
 & 2 & -1 & -4 & -9 & -51
\end{array}$$

$\boldsymbol{C=2x^3-x^2-4x-9}$

$\boldsymbol{R=-51}$

Teorema del resto.

Si bien el resto de una división entre un polinomio en "x" de cualquier grado por un binomio de la forma $(\mathrm{x}-\mathrm{a})$ se puede obtener fácilmente mediante la aplicación de la regla de Ruffini, resulta más simple y directo calcular el resto mediante la aplicación del conocido "TEOREMA DEL RESTO".

Este se enuncia de la siguiente manera: El resto de la división de un polinomio en "x", por un binomio de la forma $(\mathrm{x}-\mathrm{a})$, se obtiene sustituyendo "x" por "a" en el polinomio dividendo.

Dicho de forma más sencilla es el valor que resulta de reemplazar en el dividendo la variable “x” por el valor constante “a” y efectuar las operaciones indicadas en los distintos términos del polinomio. En el ejemplo anterior:

$$(2x^4 - 9x^3 + 7x - 15) \div (x - 4) =$$

- Como analizamos anteriormente, podemos decir que: **a = 4**
- No es necesario ordenar ni completar el polinomio para aplicar el Teorema.
- El dividendo es: $D(x) = (2x^4 - 9x^3 + 7x - 15)$
- El resto estará dado por: $R = D(4) = 2 \times 4^4 - 9 \times 4^3 + 7 \times 4 - 15 = -51$ $\boxed{\boldsymbol{R = -51}}$

MODULO V

TRABAJO PRACTICO: POLINOMIOS (2°Parte).

EJERCICIO Nº1: Resolver aplicando Ruffini y verificar haciendo la división:

a) $(4m^5 - 1/3m^3 + 2m^2 - m + 8/3) \div (m - 3) =$

b) $(3x^7 - 5x^5 + 1/8x^3 + x^2 - 2x + 4) \div (x + 2) =$

c) $(2y^4 - 5y^3 + 8y^2 - 3) \div (y + 5) =$

d) $(-3a^6 + 6/7a^3 + a^2 - 3) \div (a - 7) =$

e) $(3x^5 - 2x^4 + 6x^3 - x + 3) \div (x + 1) =$

EJERCICIO Nº 2: Resolver aplicando Teorema del Resto:

a) $(4m^5 - 1/3m^3 + 2m^2 - m + 8/3) \div (m - 3) =$

b) $(3x^7 - 5x^5 + 1/8x^3 + x^2 - 2x + 4) \div (x + 2) =$

c) $(2y^4 - 5y^3 + 8y^2 - 3) \div (y + 5) =$

d) $(-3a^6 + 6/7a^3 + a^2 - 3) \div (a - 7) =$

e) $(3x^5 - 2x^4 + 6x^3 - x + 3) \div (x + 1) =$

MODULO V (continuación): MAGNITUDES Y UNIDADES.

Una magnitud es cualquier propiedad de los cuerpos que se puede medir. Medir una cantidad de una magnitud es compararla con otra cantidad fija llamada unidad de medida. **Es decir, comparar una cantidad con su correspondiente unidad.**

Una medida se expresa con un número y una unidad de medida. Algunas magnitudes importantes:

A) La Longitud cuya unidad de medida principal es el metro.
B) La Superficie cuya unidad de medida es el metro cuadrado
C) La Masa cuya unidad de medida principal es el Gramo o el Kilogramo.
D) La Capacidad cuya unidad de medida principal es el litro.
E) El Volumen cuya unidad de medida es el metro cubico.

A) Medidas de Longitud.

La longitud determina la distancia que hay entre dos puntos, o dicho de otra manera, **longitud es la cantidad de espacio que hay entre dos puntos**. Por ejemplo, la distancia que hay entre mi casa y la Facultad, o la distancia de un potrero a la aguada. El sistema métrico decimal (SMD) es el más utilizado para realizar las medidas. Se llama decimal porque sus unidades van de diez en diez. La **unidad principal** para medir la **longitud** es el **metro**.

Pero, ¿qué hago si quiero medir objetos mucho más pequeños? ¿U objetos mucho más grandes? Para eso tenemos más medidas de longitud: los múltiplos y los submúltiplos del metro.

Para expresar las longitudes pequeñas utilizamos los **submúltiplos del metro**: - El decímetro (dm) - El centímetro (cm) - El milímetro (mm).

Para expresar las longitudes grandes utilizamos los **múltiplos del metro**: - El decámetro (dam) - El hectómetro (hm) - El kilómetro (km).

Para transformar una unidad de longitud en la unidad inmediatamente inferior o superior, multiplicamos o dividimos por 10 respectivamente.

Las relaciones entre estas unidades de longitud se recogen del siguiente gráfico:

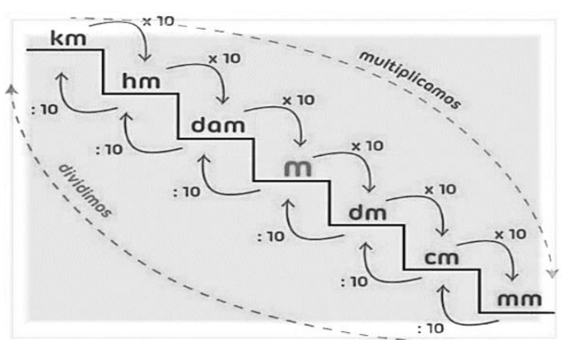


Tabla I. Unidades de longitud con su respectiva abreviatura y su valor en metros.

MÚLTIPLOS			UNIDAD	SUBMÚLTIPLOS		
kilómetro	hectómetro	decámetro	metro	decímetro	centímetro	milímetro
km	hm	dam	m	dm	cm	mm
1.000 m	100 m	10m	1	0,1 m	0,01 m	0,001 m

Ejemplo: Pablo para mantener su colesterol en niveles normales, debe realizar caminatas diarias de 5 kilómetros. ¿Cuantos metros equivalen estos 5 km?

Si observamos el grafico, vemos que para pasar de km a metro existen tres saltos en descenso por diez (10 x 10 x 10=1000). En consecuencia, a los 5 km debemos multiplicarlo por 1000. Es decir, Pablo corre 5000 metros diarios.

Ejemplo: Luego de su caminata debe ingerir 70 milímetros de una barrita multivitamínica recomendada por su medica Deportologa. ¿Cuántos centímetros son??

Nuevamente observando el grafico vemos que de mm a cm existe solo un ascenso dividido en diez es decir los 70 mm lo dividimos en diez. En consecuencia la barrita mide 7 cm.

B) **Medidas de superficie**

Para medir superficies (áreas) se utilizan distintas unidades de medida. La más utilizada es el metro cuadrado (m^2). Un metro cuadrado es la superficie de un cuadrado cuyo lado mide un metro.

También existen unidades de medidas de áreas mayores y menores al metro cuadrado. Para transformar una unidad de superficie en la unidad inmediatamente inferior o superior, multiplicamos o dividimos por 100 respectivamente

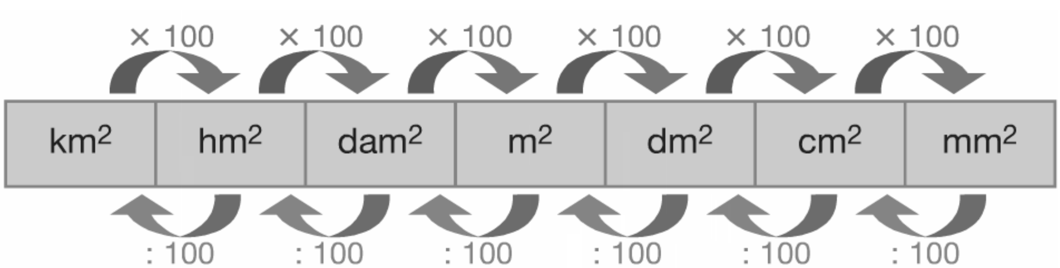


Tabla II. unidades de superficie, con su respectiva abreviatura y su valor en metros cuadrados.

Kilómetro cuadrado	km^2	1 000 000 m^2
Hectómetro cuadrado	hm^2	10 000 m^2
Decámetro cuadrado	dam^2	100 m^2
Metro cuadrado	m^2	m^2
Decímetro cuadrado	dm^2	0,01 m^2
Centímetro cuadrado	cm^2	0,0001 m^2
Milímetro cuadrado	mm^2	0,000001 m^2

Ejemplo: Jaimito quiere comprar un placard que ocupa 25.000 cm^2 de superficie, pero duda si podrá entrar en su habitación la cual tiene una superficie de 4m x 5m = 20 m^2. Cuantos m^2 de superficie ocupara el placard?

Desde cm^2 a m^2 hay dos posiciones hacia la izquierda, tendremos que dividir por 100 dos veces, es decir por 10.000; y para ello corremos la coma de decimales 4 lugares a la izquierda: 25.000: 10.000 = 2,5 m^2. Recomendamos a Jaimito que compre tranquilamente el placard ya que solo ocupa 2,5 m^2 de superficie.

B1) Medidas Agrarias

Llamamos medidas agrarias a las medidas de superficie para medir los campos o parcelas rurales. Su **unidad** principal es el área o decámetro cuadrado. El área es un decámetro cuadrado (que tiene 100 m^2). El área tiene un **múltiplo**, que es la hectárea, que equivale a 100 áreas o 10.000 m^2. También tiene un **submúltiplo** que es la centiárea (que vale 1 m^2)

1 ha	= 1 hm^2	= 10.000 m^2
1 a	= 1 dam^2	= 100 m^2
1 ca	= 1 m^2	

Ejemplo: Carlitos fue a una inmobiliaria y le ofrecieron una finca de 40 km^2 de superficie en la Cuenca de Pozuelos, de excelente aptitud para la cría de Ovinos y Camélidos Sudamericanos. Desea averiguar cuantas hectáreas equivalen.

Uno de los tantos razonamientos sencillos sería el siguiente:

1 ha= 1 hm^2.

1 km^2= 100 hm^2. Por lo tanto 40 km^2= 4.000 hm^2. *Por lo tanto 4000 hm^2= 4.000 ha.

Ejemplo**:** ¿Cuántas hectáreas equivale un cultivo de algodón de 356.500 m^2?

*356500 / 10000 = 35,65 ha.

C) Unidades de Masa

La masa es una magnitud física que mide la cantidad de materia contenida en un cuerpo. La unidad fundamental de medida en el kilogramo (en el sistema Internacional de unidades). En el el sistema cgs la unidad de medida estándar es el gramo.

No confundir masa con peso ya que son propiedades diferentes de los cuerpos. Hablamos de peso como una cuantificación de la atracción gravitacional ejercida sobre los cuerpos (se mide en Newton). Volviendo al tema de masa dijimos que la unidad de medida es el gramo, pero no es la única unidad de medida. Tenemos los Múltiplos del gramo (para expresar unidades más grandes que el gramo) y los submúltiplos (para expresar unidades más pequeñas que el gramo).

EQUIVALENCIA ENTRE LAS DISTINTAS UNIDADES DE MASA

La principal unidad de masa es el kilogramo.

Cada unidad de masa es 10 veces mayor que la unidad inmediata inferior y 10 veces menor que la unidad inmediata superior.

tonelada	quintal	miriagramo	kilogramo	hectogramo	decagramo	gramo	decigramo	centigramo	miligramo
t	**q**	**mag**	**kg**	**hg**	**dag**	**g**	**dg**	**cg**	**mg**

Ejemplos:

Un camión cerealero tiene una capacidad máxima permitida de transportar 30000 kg de maíz. Se desea averiguar cuantas toneladas son.

Si observamos en el gráfico de kilogramos (kg) a tonelada (tn) existen tres posiciones hacia la izquierda en consecuencia no queda: 30000 / 1000 = 30 tn.

En la preparación de un caldo nutritivo para bacterias aeróbicas se necesitan agregar 35 decigramos de suplemento gelificante por cada litro de agua. Cuantos milígramos son?.

Observando el grafico, para pasar de decigramo (dg) a miligramos (mg) pasamos dos posiciones hacia la derecha, por lo tanto: 35 x 100= 3500 mg

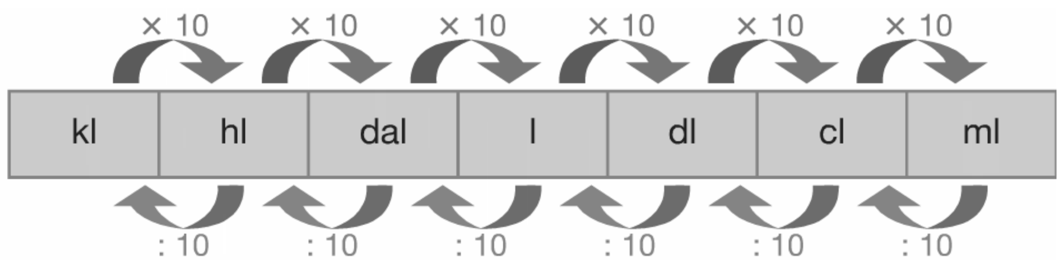
D) Medidas de capacidad

La capacidad mide la **cantidad de líquido que cabe dentro de un objeto**. Por ejemplo, la capacidad de una mochila pulverizadora muestra la cantidad de líquido plaguicida con la que podemos llenarla.

Otra forma de llamar a la **capacidad** es **volumen**. Digamos que **la capacidad es el volumen que ocupa un cuerpo en el espacio**.

La unidad principal para medir la capacidad de un objeto es el **litro**. Pero no es la única que tenemos. Están los **múltiplos** (Kilolitro, Hectolitro, Decalitro**)**, que son las unidades para expresar capacidades más grandes que el litro y los **submúltiplos** (decilitro, centilitro, mililitro) que son las unidades para expresar capacidades más pequeñas.

Unidades de capacidad y relación que existe entre ellas:



Ejemplo

- Para pasar de hl a l multiplicamos por 100
- Para pasar de l a hl dividimos por 100
- Para pasar de l a cl multiplicamos por 100
- Para pasar de cl a l dividimos por 100.

Unidades de capacidad				
	Unidad	Símbolo	Equivale a	También a
Múltiplos	Kilolitro	kl	1 000 l	10^3 l
	Hectolitro	hl	100 l	10^2 l
	Decalitro	dal	10 l	10^1 l
Unidad principal	**Litro**	**l**	**1 l**	**10^0 l = 1 l**
Submúltiplos	Decilitro	dl	0.1 l	1 L = 10 dl
	Centilitro	cl	0.01 l	1 L = 100 cl
	Mililitro	ml	0.001 l	1 L = 1000 ml

E) Medidas de volumen

Las medidas de Volumen se emplean para medir el espacio ocupado por los objetos que tienen tres dimensiones (ancho, largo y alto). Ejemplo: el volumen de aire en un suelo arenoso. El volumen ocupado por 100 tn de maíz, el volumen de agua almacenado parcialmente en una presa. La unidad básica es el **metro cúbico**, que equivale al volumen de un cubo que tiene un metro de ancho por un metro de largo por un metro de alto.
A diferencia de las Unidades de Superficie (de dos dimensiones), en las Unidades de Volumen, al ser de tres dimensiones (ancho, largo y alto), el valor de cada unidad es mil veces mayor (10 x 10 x 10 = 1000) que la unidad inmediata inferior.

<u>Unidades de volumen y relación que existe entre ellas</u>

La principal unidad de volumen es el metro cúbico.

Cada unidad de volumen es 1.000 veces mayor que la unidad inmediata inferior y 1.000 veces menor que la unidad inmediata superior.

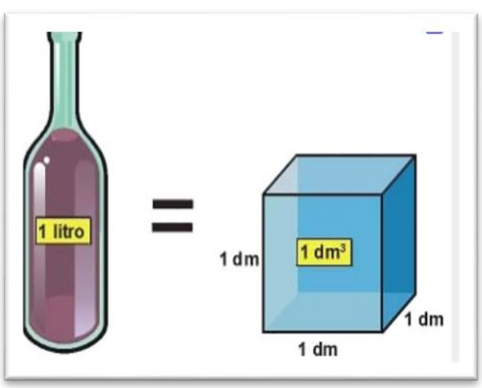
x 1.000 →	x 1.000 →	x 1.000 →	x 1.000 →	x 1.000 →	x 1.000 →	x 1.000 →	
miriámetro cúbico mam^3	kilómetro cúbico km^3	hectómetro cúbico hm^3	decámetro cúbico dam^3	metro cúbico m^3	decímetro cúbico dm^3	centímetro cúbico cm^3	milímetro cúbico mm^3
← : 1.000	← : 1.000	← : 1.000	← : 1.000	← : 1.000	← : 1.000	← : 1.000	

Unidades de volumen

Múltiplos y submúltiplos del metro cúbico:

	Unidad	Símbolo	Equivalencia
Múltiplos	Kilómetro cúbico	Km^3	$1\ Km^3 = 1\ 000\ 000\ 000\ m^3$
	Hectómetro cúbico	hm^3	$1\ hm^3 = 1\ 000\ 000\ m^3$
	Decámetro cúbico	dam^3	$1\ dam^3 = 1000\ m^3$
	Metro cúbico	m^3	$1\ m^3$
Submúltiplos	Decímetro cúbico	dm^3	$1\ dm^3 = 0{,}001\ m^3$
	Centímetro cúbico	cm^3	$1\ cm^3 = 0{,}000001\ m^3$
	Milímetro cúbico	mm^3	$1\ mm^3 = 0{,}000000001\ m^3$

Como las **medidas de capacidad** sirven para medir la cantidad de líquido principalmente, <u>se relacionan</u> con las **medidas de volumen**, porque estas nos permiten ver cuanto líquido cabe en un espacio.



Medidas de volumen	Medidas de capacidad
$1\ m^3$	1 000 litros
$100\ dm^3$	100 litros
$10\ dm^3$	10 litros
$1\ dm^3$	**1 litro**
$100\ cm^3$	1decilitro
$10\ cm^3$	1 centilitro
$1\ cm^3$	**1 mililitro**
$1\ mm^3$	0,1 mililitro

MODULO V (continuación)

TRABAJO PRACTICO: UNIDADES DE MEDIDA

Ejercicio Nº1: Utilizando el SIMELA (Sistema Métrico Legal Argentino) realizar los siguientes ejercicios reduciendo las magnitudes solicitadas:

UNIDADES DE PESO						
Kilógramo	Hectógramo	Decágramo	gramo	decígramo	centígramo	milígramo
Kg.	Hg.	Dg.	g.	dg.	cg.	mg.
1.000 g.	100 g.	10 g.	1 g.	0,1 g.	0,01 g.	0,001 g.

UNIDADES DE CAPACIDAD						
Kilólitro	Hectólitro	Decálitro	litro	decílitro	centílitro	milílitro
Kl.	Hl.	Dl.	l.	dl.	cl.	ml.
1.000 l.	100 l.	10 l.	1 l.	0,1 l.	0,01 l.	0,001 l.

UNIDADES DE VOLUMEN						
Kilómetro cúbico	Hectómetro cúbico	Decámetro cúbico	metro cúbico	decímetro cúbico	centímetro cúbico	milímetro cúbico
Km^3	Hm^3	Dm^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
1.000.000.000 m^3	1.000.000 m^3	1.000 m^3	1 m^3	0,001 m^3	0,000001 m^3	0,00000000 m^3

UNIDADES DE SUPERFICIE						
Kilómetro cuadrado	Hectómetro cuadrado	Decámetro cuadrado	metro cuadrado	decímetro cuadrado	centímetro cuadrado	milímetro cuadrado
Km^2	Hm^2	Dm^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
1.000.000 m^2	10.000 m^2	100 m^2	1 m^2	0,01 m^2	0,0001 m^2	0,000001 m^2

UNIDADES DE LONGITUD						
Kilómetro	Hectómetro	Decámetro	metro	decímetro	centímetro	milímetro
Km.	Hm.	Dm.	m.	dm.	cm.	mm.
1.000 m.	100 m.	10 m.	1 m.	0,1 m.	0,01 m.	0,001 m

a) Completar la siguiente tabla.

Kl	hl	dal	L	dl	cl	ml
			3,748			
	102,37					
						12589900
					89,458	

EJERCICIO Nº 2: Resolver los siguientes ejercicios:

$a)\ 100\ cm\ \ a\ \ m$ $\quad b)\ 23{,}167\ mm\ \ a\ \ dam$ $\quad c)\ 0{,}01589\ km\ \ a\ \ mm$ $\quad d)\ 2100\ m^2\ \ a\ \ mm^2$

$e)\ 20{,}5\ hm^2\ \ a\ \ cm^2$ $\quad f)\ 45\ dam^2\ \ a\ \ m^2$ $\quad g)\ 1234{,}3\ dm^2\ a\ \ m^2$ $\quad h)\ 5{,}2\ km^2\ \ a\ \ ha$

$i)\ 5{,}8\ hl\ \ a\ \ cl$ $\quad j)\ 567\ ml\ \ a\ \ cl$ $\quad k)\ 12\ hm^3\ \ a\ \ m^3$ $\quad l)\ 30045\ l\ \ a\ \ m^3$ $\quad m)\ 14\ hl\ a\ l$

$n)\ 0{,}0045\ mm^3\ a\ m^3$ $\quad$ ñ) $1400\ ha\ \ a\ \ m^2$ $\quad o)0{,}0000000056\ cm^2\ a\ \ dam^2$ $\quad p)\ 0{,}5\ m^3\ a\ l$

EJERCICIOS Nº3: Realizar las siguientes operaciones:

a) $12\ km + 3{,}5\ dam + 358{,}36\ mm = expresar\ el\ resultado\ en\ m$

b) $35\ dl - 0{,}11\ ml + 259\ hl + 5987\ dl = expresar\ el\ resultado\ en\ dal\ y\ m^3$

c) $35{,}26\ mg - 17\ dg + 1236\ hg - 1kg = expresar\ el\ resultado\ en\ g$

d) $365\ km^2 + 23005{,}56\ dm^2 + 7{,}6\ hm^2 = expresar\ el\ resultado\ en\ m^2 y\ en\ ha$

e) $3654\ 3\ cm^3 + 1256{,}25\ hm^3 = expresar\ el\ resultado\ en\ m^3 y\ en\ hl$

MODULO VI: FACTOREO.

Factorear un numero significa “expresarlo como el producto de otros números”. Cuando hablamos de polinomios, **transformamos la suma algebraica que constituye al polinomio en el producto de cierto número de polinomios más simples.**

A los fines de convertir un polinomio en el producto de otros, vamos a considerar seis casos que se aplican en otras tantas situaciones diferentes. Para factorear un polinomio, es conveniente antes de su realización analizar bien cuál es el caso de factoreo que nos permite realizar la transformación referida.

1) PRIMER CASO – FACTOR COMUN.

Cuando todos los términos que integran el polinomio tienen uno o varios factores en comunes, se sacan estos y se indican multiplicando a los términos que quedan luego de haber dividido cada uno de ellos por el o los factores comunes. Los términos residuales se encierran en un paréntesis que se multiplica por los factores comunes.

Ejemplo: factorear: $-6x^2y^3 + 3x^3y^2 + 12xy^3z - 9xy^2z =$

- Se observa que los factores $3, x, y^2$ están contenidos en todos los términos del polinomio. En consecuencia $\mathbf{3, x, y^2}$ es la expresión que sacaremos fuera del paréntesis, quedando dentro del mismo los cocientes que resulten de dividir los términos del polinomio por el factor común.

$$-6x^2y^3 + 3x^3y^2 + 12xy^3z - 9xy^2z = \boxed{\mathbf{3xy^2.(-2xy + x^2 + 4yz - 3z)}}$$

- De esta manera hemos transformado un polinomio de cuatro términos en el producto de un monomio por un polinomio, es decir hemos factoreado.

2) SEGUNDO CASO – DESCOMPOSICION EN GRUPOS.

El método consiste en separar los términos del polinomio en grupos de igual número de términos que tengan ellos un factor en común. Luego se extrae el, o los factores comúnes de cada grupo quedando así el polinomio factoreado.

Ejemplo: Factorear $2ax + 2bx - ay + 5a - by + 5b =$

- En el ejemplo podemos descomponer el polinomio en dos grupos de tres términos cada uno. El grupo integrado por los términos $\mathbf{2ax, -ay, 5a}$, tiene como factor en común a "$\mathbf{a}$"**,** en tanto que los términos $\mathbf{2bx, -by, 5b}$ tienen como factor común "$\mathbf{b}$"**.** Luego nuestro polinomio queda de la siguiente manera:

$$2ax + 2bx - ay + 5a - by + 5b = (2ax - ay + 5a) + (2bx - by + 5b) =$$

$$= a.(2x - y + 5) + b.(2x - y + 5) =$$

- Si observamos en detalle, los dos paréntesis son iguales, por lo tanto, pueden extraerse los mismos como factores comunes, lográndose de esta manera el factoreo del polinomio origen.

$$2ax + 2bx - ay + 5a - by + 5b = \boxed{(\mathbf{2x - y + 5})\,.\,(\mathbf{a + b})}$$

3) TRINOMIO CUADRADO PERFECTO.

Cuando tenemos un polinomio de tres términos, en lo que dos de ellos son cuadrados y el restante resulta ser el duplo del producto de las bases de los cuadrados; el polinomio puede escribirse como el cuadrado de un binomio. Recordando:

$$\boxed{\begin{array}{l}(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (\boldsymbol{a+b}) \times (\boldsymbol{a+b}) \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (\boldsymbol{a-b}) \times (\boldsymbol{a-b})\end{array}}$$

Ejemplo: Factorear: $a^4 + \frac{1}{4}p^2 + a^2p^2 =$

- En el polinomio dado, el primer y segundo término son cuadrados perfectos.

$$a^4 = (a^2)^2 \qquad ; \qquad \frac{1}{4}p^4 = \left(\frac{1}{2}p^2\right)^2$$

- El otro término es igual al duplo de las bases de los cuadrados (factores entre paréntesis).

$$a^2p^2 = 2.(a^2)\,.\left(\frac{1}{2}p^2\right)$$

- En consecuencia, podemos escribir:

$$a^4 + \frac{1}{4}p^2 + a^2p^2 = a^4 + a^2p^2 + \frac{1}{4}p^2 = \left(a^2 + \frac{1}{2}p^2\right)^2 = \boxed{\left(\boldsymbol{a^2 + \frac{1}{2}p^2}\right).\left(\boldsymbol{a^2 + \frac{1}{2}p^2}\right)}$$

4) CUATRINOMIO CUBO PERFECTO.

Si tenemos un polinomio de cuatro términos, de los cuales dos son cubos perfectos y los otros dos son iguales al triple del producto del cuadrado de la base de uno de los cubos por la base del otro, el polinomio puede factorearse teniendo en cuenta que:

$$\boxed{\begin{array}{l}(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (\boldsymbol{a+b}) \times (\boldsymbol{a+b}) \times (\boldsymbol{a+b}) \\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (\boldsymbol{a-b}) \times (\boldsymbol{a-b}) \times (\boldsymbol{a-b})\end{array}}$$

Ejemplo: Factorear $x^6 + 6x^4 + 12x^2y^2 + 8y^3 =$

- El primer y cuarto termino son cubos perfectos, en tanto falta por averiguar si los otros dos términos cumplen con la condición necesaria para considerar al polinomio como un cuatrinomio cubo perfecto.

$$x^6 = (x^2)^3 \quad ; \quad 8y^3 = (2y)^3$$

$$6x^4y = 3(x^2)^2.(2y) \quad ; \quad 12x^2y^2 = 3(x^2).(2y)^2$$

- Efectivamente cumplen con la condición necesaria el tercer y cuarto término.
- Finalmente podemos escribir:

$$x^6 + 6x^4y + 12x^2y^2 + 8y^3 = (x^2 + 2y)^3 = \boxed{\boldsymbol{(x^2 + 2y).(x^2 + 2y).(x^2 + 2y)}}$$

5) <u>QUINTO CASO – DIFERENCIA DE CUADRADOS.</u>

Cuando el polinomio está formado por la <u>resta de dos monomios que son cuadrados</u>, podemos factorearlos aplicando la diferencia de cuadrados. Recordando que:

$$\boxed{\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a - b) \times (a + b)}}$$

<u>Ejemplo:</u> Factorear: $144m^6 - 121x^8 =$

- Ambos términos se pueden escribir como cuadrados.

$$144m^6 = (12m^3)^2 \quad ; \quad 121x^8 = (11x^4)^2$$

- El polinomio origen resulta:

$$144m^6 - 121x^8 = (12m^3)^2 - (11x^4)^2 = \boxed{\boldsymbol{(12m^3 - 11x^4) \times (12m^3 + 11x^4)}}$$

6) <u>SEXTO CASO – SUMA Y DIFERENCIA DE CUBOS.</u>

En los casos en que el polinomio a factorear sea un binomio compuesto por la suma o diferencia de cubos; el factoreo se logra recordando las siguientes expresiones de fácil demostración (con solo realizar las operaciones indicadas se verifican las igualdades).

$$\boxed{\boldsymbol{a^3 + b^3 = (a + b).(a^2 - ab + b^2)}} \qquad \boxed{\boldsymbol{a^3 - b^3 = (a - b).(a^2 + ab + b^2)}}$$

<u>Ejemplo:</u> Factorear $a^3 - 27b^3$

- A este polinomio lo podemos expresar: $(a)^3 - (3b)^3$

$$(a)^3 - (3b)^3 = (a - 3b).[a^2 + a3b + (3b)^2]$$

$$a^3 - (3b)^3 = \boxed{\boldsymbol{(a - 3b).(a^2 + 3ab + 9b^2)}}$$

MODULO VI

TRABAJO PRACTICO: FACTOREO

Primer caso de Factoreo

EJERCICIO Nº1: Factorear sacando Factor Común

a) $4x^3y^2 - 2yx^2 + 8/9zx^4y^5 =$
b) $9abx^2 - 3xa^2b^3 + 3azx^2 =$
c) $4/3xa^2 - 8/9ax^3 + 16/15a^5x^7 - 2/3x^5a^4 =$
d) $5x^2(x-y) + 3x\,(x-y) + \ 7\,(x-y) =$
e) $125a^4b^5c^5 - 45a^5b^3c^4x^3 + 5a^3b^2c^4 - 300xa^4b^2c^3 - 10a^3b^2c^3 =$

Segundo caso de Factoreo

EJERCICIO Nº 2: Factorear sacando Factor Común por Grupos

a) $3x - 2ab + nx - 2bx + an + 3a =$
b) $abxn + 2nx^2 + 2ax^2 + axb^2 + 2bx^2 + bxa^2 =$
c) $2mx + xn^3 - 2my - yn^3 =$
d) $6ax^2 - 12mxa^3 + 4yn^5 + 2zny^3 + 18zny =$
e) $5a - ax + 5b + 5c - bx - cx + 25 - 5x =$

Tercer caso de Factoreo

EJERCICIO Nº 3: Factorear los Trinomios cuadrados Perfectos

a) $25x^2 + 10xy^2 + y^4 =$
b) $-12a^2byx^2 + 4b^2y^2 + 9x^4a^4 =$
c) $-4m^3y^3z^2 + 4m^4y^6 + m^2z^4 =$
d) $3/2z^5m^3 + 1/16m^4z^4 + 9m^2z^6 =$
e) $-1/7xa^3y^2z^2 + 1/4z^4y^4 + 1/49x^2a^6 =$

Cuarto caso de Factoreo

EJERCICIO Nº 4: Factorear los Cuatrinomios Cubos Perfectos

a) $-8y^3+12xy^2-6yx^2+x^3 =$
b) $3/2m^2+6m^4+8m^9+1/8 =$
c) $3/100a^{12}z^2+1/64a^6+1/125a^{15}z^3+3/80za^9 =$
d) $-2/3mx^5a^2+1/27a^3x^6-8x^3m^3+4ax^4m^2 =$
e) $27ax^2y^2m^2+27x^3y^3+a^3m^6+9xya^2m^4 =$

Quinto caso de Factoreo

EJERCICIO Nº 5: Factorear las siguientes Diferencias de Cuadrados

a) $16x^4y^6-25a^{10}z^2 =$
b) $1/49a^8b^4-1/4m^4x^{16} =$
c) $144x^{24}z^8a^2-225y^2z^4y^{12} =$
d) $x^2-4 =$
e) $25x^2-1 =$

Sexto caso de Factoreo

EJERCICIO Nº 6: Factorear las siguientes Sumas o Diferencias de Cubos

a) $64m^3+125n^6 =$
b) $27x^3+64 =$
c) $64m^3-125n^6 =$
d) $1728y^6z^{60}-512x^3y^3 =$
e) $1/27z^{27}y^3-1/64x^3a^{126} =$

EJERCICIO Nº 6: Factorear las siguientes expresiones.

$a)\ 169x^2-81m^4 =$ $b)\ 125y^3-729m^{27} =$ $c)\ 4x^2y-2x^2y^2z+8x^5yz^3 =$

$d)\ 216a^3b^4c^4-48a^4b^2c^3+6a^2b^2c^3-300a^3bc^6x-12a^2b^3c^4 =$ $e)\ x^{n+2}+2x^n+x^2+2 =$

$f)\ 0{,}125-0{,}75xy+1{,}5x^2y^2-x^3y^3 =$ $g)\ 9x^4-2x^2+1/9 =$ $h)\ 36/25x^2-169/49\,y^2$